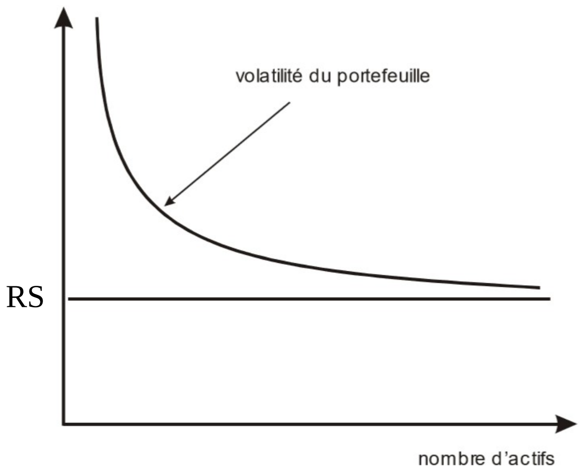
I) La gestion du risque par la diversification

Le risque du portefeuille est communément représenté par la variance du portefeuille notée : σ_p^2 .
Le choix du portefeuille se résume à maximiser la fonction V tout en respectant la contrainte budgétaire.

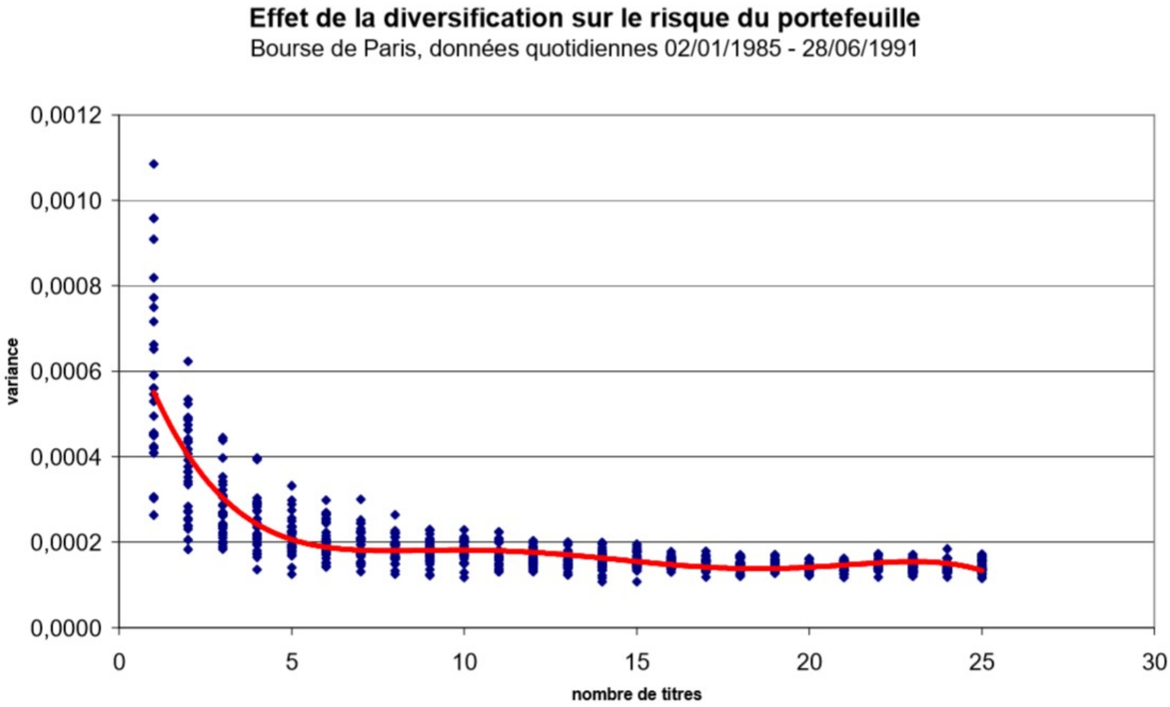
$$V(\mathbf{E}\widetilde{R}_p, \sigma_p^2) = \mathbf{E}\widetilde{R}_p - \frac{\gamma}{2}\sigma_p^2$$

Avec Erp : le rendement espéré du portefeuille et γ l'aversion au risque de l'agent.
Une dimension essentielle des choix du portefeuille est la diversification de celui-ci pour en limiter la volatilité.
La variance du portefeuille peut se décomposer ainsi : $\sigma_p^2 = \mathit{Risque\ syst\acute{e}matique} + \mathit{Risque\ propre}$
Le risque systématique est déterminé par les corrélations entre les différents actifs et le risque propre par les variances de chaque actifs.

Un résultat classique est que la variance est décroissante du nombre d'actifs et tend vers la volatilité systématique. C'est-à-dire que la diversification tend à annuler le risque propre. De plus, on associe risque et variance donc la volatilité tend par diversification vers le risque systématique.



Il ressort des études empiriques qu'un portefeuille de 20 titres (voire seulement 10) est suffisant pour assurer la convergence de la volatilité d'un portefeuille équipondéré. Au-delà de 15 titres la baisse de la variance n'est plus perceptible.



Conclusion et transition

Cependant, cette méthode est très ancienne et était déjà connue de l'assurance depuis l'antiquité. La véritable contribution de la théorie du portefeuille et de Markowitz fut de souligner qu'à nombre d'actifs donné il existe une autre méthode de diversification possible. Cette diversification ne cherche pas à jouer sur le risque propre mqis sur le risque systématique .

II) La gestion du risque systématique : l'approche de Markowitz

Un résultat essentiel de la théorie de Markowitz est l'expression du coefficient de corrélation entre deux titres a et b.

$$\rho_{jk} := \frac{cov(\widetilde{R}_j, \widetilde{R}_k)}{\sigma_j \sigma_k}$$

Les résultats obtenus dans le cas à deux actifs se retrouvent dans le cas général. Pour le voir, on part de l'expression de la variance. Lorsque l'on fait varier le poids d'un titre pour évaluer l'impact de cette évolution sur le risque, on calcule la dérivée de la variance par rapport à xi.

On obtient alors le résultat fondamental de la théorie du portefeuille selon Markowitz :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\sigma_p^2 = 2cov(\widetilde{r}_p, \widetilde{r}_i)$$

Cette relation est centrale pour la gestion des risques puisqu'elle souligne que l'impact d'un investissement plus grand dans un titre dépend essentiellement de sa covariance (et donc de sa corrélation) avec le portefeuille initial. Ainsi, même si le titre est très risqué, l'impact d'un investissement plus grand sera de diminuer le risque dès lors que cette corrélation est négative.

<u>Conclusion de la partie et transition</u>

La contribution de Markowitz fut de souligner l'importance des covariances. Cependant, deux problèmes résident dans cette méthode. Premièrement, il est difficile de calculer les covariances pour des univers de titres de grandes dimensions. Deuxièmement, on observe un problème de précision numérique/de stabilité des covariances pour les grands univers de titres.

Maintenant, il est courant de calculer ces éléments en deux étapes en recourant à des modèles factoriels. Ces modèles économétriques sont des modèles factoriels. Ces modèles économétriques sont des modèles explicatifs linéaires des rendements des titres dont les variables explicatives sont communes à tout les titres et sont appelés facteurs.

III) Le modèle de marché, une nouvelle approche de la gestion du risque inspiré des travaux de Sharpe.

Sharpe introduisit le premier modèle factoriel : le modèle de marché. Ce fut une contribution particulièrement importante au risk management.

Le rendement du titre j est alors une fonction linéaire du rendement du marché :

$$\widetilde{r}_j = a_j + \beta_j.\widetilde{r}_m + \widetilde{\varepsilon}_j$$

où :

- α_j est une constante (propre au titre j) ;
- $\widetilde{r}_m$ est le rendement périodique de l'indice du marché ;
- β_j est la sensibilité du rendement du titre j au rendement de l'indice du marché ;
- $\widetilde{\varepsilon}_j$ est le résidu de l'économie, et regroupe donc l'ensemble des éléments spécifiques de l'entreprise j.

La valeur de la sensibilité du rendement du titre j au marché au donné par :

$$\beta_j = \frac{cov(\widetilde{r}_j, \widetilde{r}_m)}{\sigma^2(\widetilde{r}_m)}$$

Il en découle alors une nouvelle décomposition du risque :

Risque total = Risque spécifique + Risque systématique

On peut toujours espérer gérer le risque spécifique par la diversification car il correspond qu risque propre du modèle de Markowtiz. Le risque systématique est liée à l'évolution du marché dans son

ensemble. Le risque systématique peut être transféré entre les investisseurs mais ne peut pas disparaître.
Ainsi, le modèle de marché apporte une nouvelle décomposition du risque :

$$\sigma^2(\widetilde{r}_j) = \beta_j^2 \sigma^2(\widetilde{r}_m) + \sigma^2(\widetilde{\varepsilon}_j)$$

Risque du titre j = Risque systématique + Risque spécifique

En moyenne, l'ordre de grandeur du risque spécifique est de 3/4 pour un titre mais dépend du pays ainsi que du secteur d'activité. Néanmoins, si on passe au portefeuille, la part du risque systématique augmente avec le nombre de titre. En effet, plus il y a de titre plus le risque spécifique diminue et plus le portefeuille tend à ressembler au marché donc le risque systématique augmente.