1 Exercices sur les DEFORMATIONS

Exercice 1.1

On considère le champ de déplacement suivant : $\begin{cases} u_1 = 10^{-4} X_1 - 2\sqrt{3}.10^{-4} X_2 - 3\sqrt{3}.10^{-4} X_3 \\ u_2 = -2\sqrt{3}.10^{-4} X_1 + 4.10^{-4} X_2 + 2.10^{-4} X_3 \\ u_3 = -3\sqrt{3}.10^{-4} X_1 + 2.10^{-4} X_2 - 5.10^{-4} X_3 \end{cases}$

1. Calculer le tenseur symétrique de déformation et le tenseur antisymétrique de rotation
2. Calculer la dilatation linéaire (allongement relatif) dans la direction $\vec{a} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 + \sqrt{3}\,\vec{e}_3\right)$
3. Donner le tenseur déviateur des déformations. Que peut-on dire?

===
CORRECTION
===

1. **Calculer le tenseur symétrique de déformation et le tenseur antisymétrique de rotation**

$$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{H}} + \overline{\overline{H}}^T\right) \text{ et } \overline{\overline{\omega}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{H}} - \overline{\overline{H}}^T\right)$$

Or $\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{grad}}\,(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 & 2 \\ -3\sqrt{3} & 2 & -5 \end{pmatrix}.10^{-4}$ et est symétrique donc $\overline{\overline{\varepsilon}} = \overline{\overline{H}}$ et $\overline{\overline{\omega}} = \overline{\overline{0}}$

2. **Calculer la dilatation linéaire (allongement) dans la direction** $\vec{a} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 + \sqrt{3}\,\vec{e}_3\right)$

L'allongement dans la direction $\vec{a}$ est donné par: $\varepsilon(\vec{a}) = \vec{a}.\overline{\overline{\varepsilon}}.\vec{a}$

Soit $\varepsilon(\vec{a}) = \left(\begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{3} & -3\sqrt{3} \\ -2\sqrt{3} & 4 & 2 \\ -3\sqrt{3} & 2 & -5 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\right).\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.10^{-4}$ donc:

$$\varepsilon(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{9}{2} \\ -\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.10^{-4} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4\sqrt{3} \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.10^{-4} = -2.10^{-4} - 6.10^{-4} = -8.10^{-4}$$

3. **Donner le tenseur déviateur des déformations. Que peut-on dire?**

$tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right) = 1.10^{-4} + 4.10^{-4} - 5.10^{-4} = 0$

Or $\overline{\overline{\varepsilon}}^d = \overline{\overline{\varepsilon}} - \frac{1}{3} tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\overline{\overline{I}} = \overline{\overline{\varepsilon}}$ donc le tenseur de déformation est déjà déviatorique : déformation sans changement de volume.

Remarques:

- $tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)$: caractérise le changement de volume au voisinage d'un point matériel (un invariant du tenseur $\overline{\overline{\varepsilon}}$).
- $\varepsilon_s = \frac{1}{3} tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)$: déformation principale moyenne.
- La partie sphérique du tenseur de déformation $\overline{\overline{\varepsilon}}^{s} = \frac{1}{3} tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\overline{\overline{I}}$ caractérise la dilatation uniforme au voisinage d'un point matériel.
- La partie déviatorique du tenseur de déformation $\overline{\overline{\varepsilon}}^{d} = \overline{\overline{\varepsilon}} - \overline{\overline{\varepsilon}}^{s} = \overline{\overline{\varepsilon}} - \frac{1}{3} tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\overline{\overline{I}}$ caractérise la distorsion sans changement de volume au voisinage d'un point matériel.

Exercice 1.2

Soit le vecteur déplacement $\vec{u} = \begin{pmatrix} 35X_1 + 23X_2 + 2X_3 \\ 7X_1 - 12X_2 + 10X_3 \\ -6X_1 - 20X_3 \end{pmatrix}$:

1. Déterminer le tenseur de déformation et de rotation.
2. Calculer le tenseur déviateur de déformation.

==

CORRECTION

==

1. Déterminer les tenseurs de déformation et de rotation.

Les tenseurs de déformation et de rotation se déduisent du tenseur gradient par $\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{H}} + \overline{\overline{H}}^T\right)$ et $\overline{\overline{\omega}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{H}} - \overline{\overline{H}}^T\right)$.

$\overline{\overline{H}} = \overline{\overline{grad}}\,(\vec{u}) = \begin{pmatrix} 35 & 23 & 2 \\ 7 & -12 & 10 \\ -6 & 0 & -20 \end{pmatrix}$; $\boxed{\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} 35 & 15 & -2 \\ 15 & -12 & 5 \\ -2 & 5 & -20 \end{pmatrix}}$ et $\boxed{\overline{\overline{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & 8 & 4 \\ -8 & 0 & 5 \\ -4 & -5 & 0 \end{pmatrix}}$

2. Calculer le tenseur déviateur de déformation.

Le tenseur déviateur de déformation se détermine par $\overline{\overline{\varepsilon}}^d = \overline{\overline{\varepsilon}} - \frac{1}{3}tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right)\overline{\overline{I}}$.

Or la trace du tenseur de déformation est égale à $tr\left(\overline{\overline{\varepsilon}}\right) = 35 - 12 - 20 = 3$

Donc le tenseur déviateur de déformation $\boxed{\overline{\overline{\varepsilon}}^d = \begin{pmatrix} 34 & 15 & -2 \\ 15 & -13 & 5 \\ -2 & 5 & -21 \end{pmatrix}}$

Exercice 1.3

Sous l'action des charges extérieures, les déplacements en un point P (x_1, x_2, x_3) sont définis à partir de l'état neutre :

$$u(P)\begin{cases} u_1 = 2.10^{-3}x_1 - 10^{-3}x_2 \\ u_2 = 3.10^{-3}x_1 - 2.10^{-3}x_2 \\ u_3 = 0 \end{cases}$$

1. Définir les tenseurs de déformation et de rotation
2. A l'aide de la représentation de Mohr, déterminer les déformations et les directions principales
3. Au point P, on place une jauge électrique dans une direction $\vec{q} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Quelle sera la mesure ainsi effectuée.

===

CORRECTION

===

1. **Définir les tenseurs de déformation et de rotation**

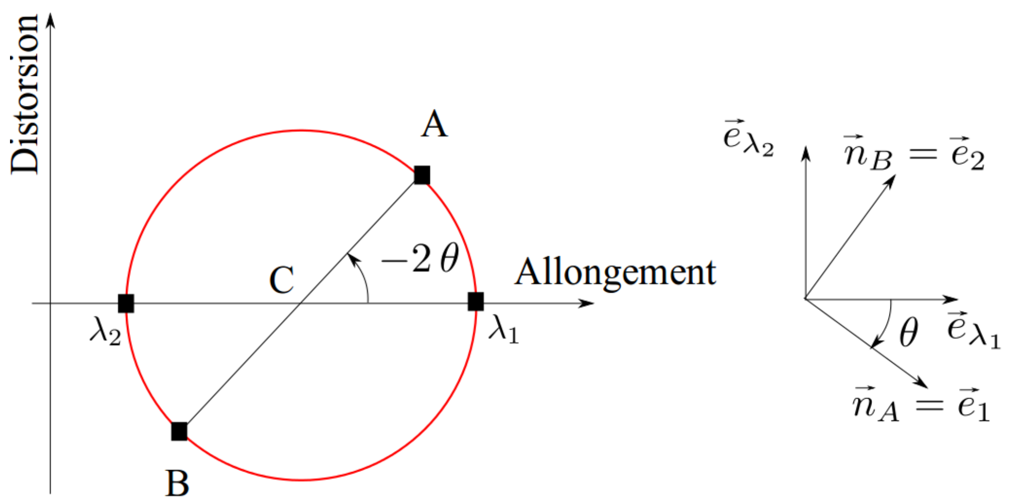
$\overline{\overline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{H}} + \overline{\overline{H}}^T\right)$ et $\overline{\overline{\omega}} = \frac{1}{2}\left(\overline{\overline{H}} - \overline{\overline{H}}^T\right)$ or $\overline{\overline{H}} = 10^{-3}.\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\overline{\overline{\varepsilon}} = 10^{-3}.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et

$\overline{\overline{\omega}} = 10^{-3}.\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. **A l'aide de la représentation de Mohr, déterminer les déformations et les directions principales**

Une déformation principale évidente est 0. La direction principale associée à cette déformation principale est $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Plaçons nous dans le plan $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, le point $A = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}) = (2.10^{-3}, 10^{-3})$ et le point $B = (\varepsilon_{22}, -\varepsilon_{12}) = (-2.10^{-3}, -10^{-3})$ sont diamétralement opposés sur le cercle de Mohr associé aux deux déformations principales qui restent.



Le centre du cercle $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2.10^{-3} - 2.10^{-3}}{2} = 0$

Le Rayon du cercle $R = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + y_A^2} = \sqrt{\left(2.10^{-3}\right)^2 + \left(10^{-3}\right)^2} = \sqrt{5}.10^{-3}$

Donc les 2 autres déformations principales sont $\lambda_{1,2} = x_C \pm R = \pm\sqrt{5}.10^{-3}$

Les déformations principales ($\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$) sont : $\begin{cases} \varepsilon_1 = \sqrt{5}.10^{-3} = 2.23.10^{-3} \\ \varepsilon_2 = 0 \\ \varepsilon_3 = -\sqrt{5}.10^{-3} = -2.23.10^{-3} \end{cases}$

Comme illustré dans la figure ci-dessus, l'angle $(\lambda_1 \hat{C} A)$ est égal à -2θ, avec θ représente l'angle orienté (e_{λ_1}, e_1) entre la direction principale associée à λ_1 et la direction d'allongement au point A (en l'occurrence e_1 puisque l'allongement en ce point est donné par ε_{11}).

$$\tan(-2\theta) = \frac{y_A}{x_A - x_C}$$

$$\theta = -\frac{1}{2} atn\left(\frac{y_A}{x_A - x_C}\right) = -\frac{1}{2} atn\left(\frac{10^{-3}}{2.10^{-3}}\right) = -\frac{1}{2} atn\left(\frac{1}{2}\right) = -13.28°$$

L'angle entre e_1 (la direction d'allongement au point A) et la direction principale associée à λ_1 $(\varphi = -\theta)$

Donc la direction pour la première déformation principale est :

$$n^I = \begin{pmatrix} \cos(13.28°) \\ \sin(13.28°) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.973 \\ 0.223 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme la deuxième déformation principale est la composante $\varepsilon_2 = \varepsilon_{33}$, la deuxième direction est $n^{II} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La troisième direction se déduit directement par un produit vectoriel pour obtenir un trièdre directe :

$$n^{III} = n^I \wedge n^{II} = \begin{pmatrix} 0.973 \\ 0.223 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.223 \\ -0.973 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. **Au point P, on place une jauge électrique dans une direction $\vec{q} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Quelle sera la mesure ainsi effectuée.**

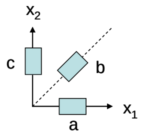
La jauge de déformation mesure un allongement (dit aussi dilatation linéaire). Donc

$$e = \vec{q}.\bar{\bar{\varepsilon}}.\vec{q} = \left[\begin{pmatrix} 2.10^{-3} & 10^{-3} & 0 \\ 10^{-3} & -2.10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}.10^{-3}\right].\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right).10^{-3} = 10^{-3}$$

Exercice 1.4

On place 3 jauges électriques en un point M d'une structure. La première placée suivant x_1 mesure une déformation de 0.4. La deuxième placée suivant x_2 mesure une déformation de 0.266. La troisième placée suivant la bissectrice de ces deux axes mesure une déformation de -0.225.
Déterminer le tenseur des déformations. En déduire par la représentation de Mohr, les déformations et directions principales.

===
CORRECTION
===



On a un problème plan. On peut donc simplifier le tenseur de déformation comme suit: $\overline{\overline{\varepsilon}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$ => 3 inconnues.

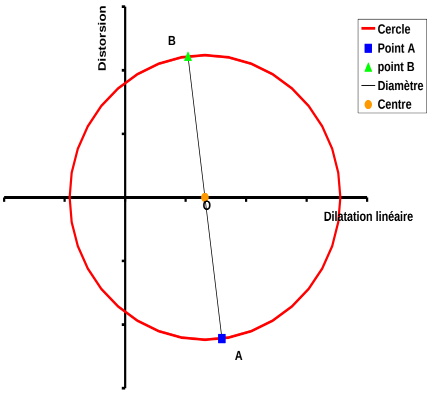
Les jauges de déformation mesurent une dilatation linéaire. Donc

$$e(\vec{n}) = \vec{n}.\overline{\overline{\varepsilon}}.\vec{n} = \left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} = \varepsilon_{11} n_1^2 + \varepsilon_{22} n_2^2 + 2\varepsilon_{12} n_1 n_2$$

$$e_a = \left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{11} = 0.4 \;; \qquad e_c = \left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \varepsilon_{22} = 0.266 \;;$$

$$e_c = \left[\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right] . \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \varepsilon_{12} = -0.225 \;\; => \varepsilon_{12} = -0.558$$

Le point $A = (0.4 \quad -0.558)$ et le point $B = (0.266 \quad 0.558)$



Donc les déformations principales sont $\lambda = x_C \pm Rayon = 0.333 \pm 0.562$ soit

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = 0.895 \\ \varepsilon_2 = -0.229 \end{cases}$$

L'angle de la direction principale entre le point A et la déformation principale est

$$\theta = \frac{1}{2} atn\left(\frac{y_A}{x_A - x_C}\right) = \frac{1}{2} atn\left(\frac{-0.558}{0.4 - 0.33}\right) = -0.726 = -41.6°$$

Le centre du cercle

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0.4 + 0.266}{2} = 0.333$$

Le Rayon du Cercle

$$Rayon = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + y_A^2} = \sqrt{(0.4 - 0.333)^2 + (-0.558)^2} = 0.562$$

Donc la direction pour la première déformation principale est donc $n^{I} = \begin{pmatrix} \cos(-41.6°) \\ \sin(-41.6°) \end{pmatrix}$

La deuxième direction a un angle de 90° avec la première direction : $\vec{n}^{I} . \vec{n}^{II} = 0$; $n^{II} = \begin{pmatrix} -\sin(-41.6°) \\ \cos(-41.6°) \end{pmatrix}$

Exercice 1.5

Le tenseur gradient de déplacement en un point O a pour matrice dans un système d'axes orthonormés x_1, x_2 :

$$\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les coordonnées des points M,N,P, dans l'état actuel ? (construction graphique) Coordonnées initiales en mm : M(100,0) ; N(0,100) et P(100,100)
2. Calculer la partie symétrique ε_{ij} et la partie antisymétrique ω_{ij} . Quelles sont les nouvelles coordonnées des points M,N,P, après la déformation ε_{ij} . Calculer l'angle de rotation (le vérifier graphiquement).
3. Calculer les déformations principales ainsi que les directions principales.

==

CORRECTION

==

1. **Quelles sont les coordonnées des points M,N,P, dans l'état actuel ? (construction graphique) Coordonnées initiales en mm : M(100,0) ; N(0,100) et P(100,100)**

$$\vec{x} = \underline{\underline{F}}.\vec{X} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}}.\vec{X} \ , \ et \ \ \vec{u} = \vec{x} - \vec{X} \ ; \ \ \vec{u} = (\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}).\vec{X} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}}.\vec{X} \ ; \underline{\underline{F}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}} + \underline{\underline{I}} \ or \ \ HPP \ \ \underline{\underline{F}} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{x}} + \underline{\underline{I}} \ ;$$

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ Donc \ \ les \ \ coordonnées \ \ actuelles : \quad O' = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O \ ;$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} = M \ ; \qquad N' = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 100 \end{pmatrix} \ ;$$

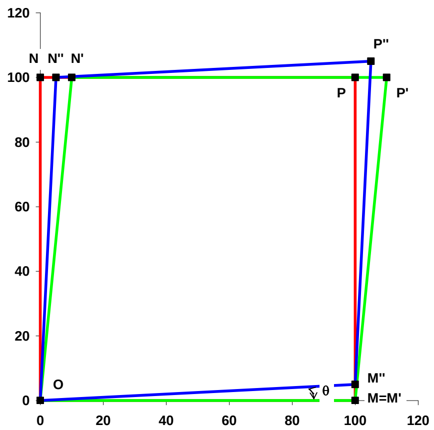
$$P' = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 100 \end{pmatrix}$$

2. **Calculer la partie symétrique ε_{ij} et la partie antisymétrique ω_{ij} . Quelles sont les nouvelles coordonnées des points M,N,P, après la déformation ε_{ij} . Calculer l'angle de rotation (le vérifier graphiquement).**

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0.05 \\ 0.05 & 0 \end{pmatrix} \ et \qquad \omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} - u_{j,i}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0.05 \\ -0.05 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$O'' = \begin{pmatrix} 1 & 0.05 \\ 0.05 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = O \ ; \qquad M'' = \begin{pmatrix} 1 & 0.05 \\ 0.05 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 5 \end{pmatrix} \ ;$$

$$N'' = \begin{pmatrix} 1 & 0.05 \\ 0.05 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 100 \end{pmatrix} \ ; \ P'' = \begin{pmatrix} 1 & 0.05 \\ 0.05 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 \\ 105 \end{pmatrix}.$$

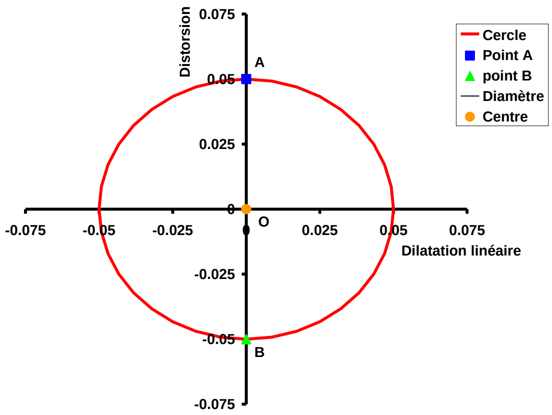


$$\tan(\theta) = \frac{MM''}{OM} = \frac{5}{100} = 0.05 \approx \theta$$

3. Calculer les déformations principales ainsi que les directions principales.

Calculer les déformations principales ainsi que les directions principales.

Le point $A = (0 \quad 0.05)$ *et le point* $B = (0 \quad -0.05)$



Le centre du cercle $x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0-0}{2} = 0$

Le Rayon du Cercle $Rayon = \sqrt{(x_A - x_C)^2 + y_A^2} = \sqrt{(0-0)^2 + (0.05)^2} = 0.05$

Donc les déformations principales sont $\lambda = x_C \pm Rayon = 0 \pm 0.05$ *soit* $\begin{cases} \varepsilon_1 = 0.05 \\ \varepsilon_2 = -0.05 \end{cases}$

L'angle de la direction principale entre le point A et la déformation principale est

$$\theta = \frac{1}{2} atn\left(\frac{y_A}{x_A - x_C}\right) = \frac{1}{2} atn\left(\frac{0.05}{0.-0.}\right) = \frac{90°}{2} = 45°$$

Donc la direction pour la première déformation principale est donc $n^I = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

La deuxième direction a un angle de 90° avec la première direction : $\vec{n}^I . \vec{n}^{II} = 0$; $n^{II} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 1.6 Chargement déformation d'un barreau rectangulaire

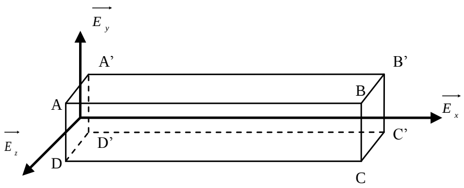
Dans un repère orthonormé direct (O / $\vec{E}_x, \vec{E}_y, \vec{E}_z$) le milieu continu étudié est défini par :

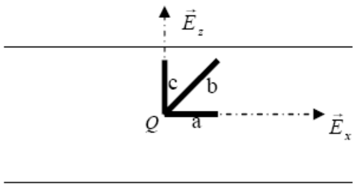
$$0 \le x \le L\,;\; -\frac{h}{2} \le y \le \frac{h}{2}\,;\; -\frac{e}{2} \le z \le \frac{e}{2}$$

La section définie par x=L est encastrée dans un milieu galiléen indéformable. L'état de déformation en tout point M(x,y,z) est défini par :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \text{avec}\;
\begin{aligned}
\varepsilon_{xx} &= \frac{1}{eh}\left(A - 12\,\frac{Bxy}{h^2}\right) \\
\varepsilon_{xy} &= \frac{3(1+\nu)A}{2eh}\left[4\,\frac{y^2}{h^2} - 1\right] \\
\varepsilon_{yy} &= \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{eh}\left(A - 12\,\frac{Bxy}{h^2}\right)
\end{aligned}$$

Dans ces expressions A, B et ν représentent des constantes.
On a L = 120 mm, h = 20 mm, e = 5 mm, A = 5 10^{-4} mm², B = 2.5 10^{-3} mm², ν=0.29





1. Au point Q (80,10,0) situé sur la face AB, on colle une rosette de trois jauges à 45° selon le schéma ci-dessus. Quelles doivent être les valeurs données par ces jauges
2. Au point Q, quel est le changement de volume ? En déduire le tenseur de déformation déviatorique ?
3. Les équations de compatibilités sont-elles satisfaites, en un point quelconque du barreau ?

==

CORRECTION

==

1. Au point Q, valeurs données par ces jauges ?

$$\varepsilon_{ij}(Q) = \frac{1}{eh}\begin{pmatrix} A - 12\,\frac{Bxy}{h^2} & \frac{2(\nu+1)A}{3}\left(4\,\frac{y^2}{h^2} - 1\right) & 0 \\ \frac{2(\nu+1)A}{3}\left(4\,\frac{y^2}{h^2} - 1\right) & -\nu\left(A - 12\,\frac{Bxy}{h^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\left(A - 12\,\frac{Bxy}{h^2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij}(Q) = \frac{1}{100}\begin{pmatrix} 5\times10^{-4} - 12\,\frac{2.5\times10^{-4}\times 80\times 10}{20^2} & \frac{2(0.29+1)\times 5\times10^{-4}}{3}\left(4\,\frac{10^2}{20^2} - 1\right) & 0 \\ \frac{2(0.29+1)\times 5\times10^{-4}}{3}\left(4\,\frac{10^2}{20^2} - 1\right) & -0.29\left(5\times10^{-4} - 12\,\frac{2.5\times10^{-4}\times 80\times 10}{20^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -0.29\left(5\times10^{-4} - 12\,\frac{2.5\times10^{-4}\times 80\times 10}{20^2}\right) \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_{ij}(Q) = \begin{pmatrix} -5.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{pmatrix}\times 10^{-5}$$

Jauge a : $e_a = \varepsilon_{ij} n_j n_i = \left[\begin{pmatrix} -5.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{pmatrix}.10^{-5}.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5.5\\0\\0\end{pmatrix}.10^{-5}.\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = -5.5\times10^{-5}$

Jauge b : $e_b = \varepsilon_{ij} n_j n_i = \left[\begin{pmatrix} -5.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{pmatrix}.10^{-5}.\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-5.5}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1.6}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.10^{-5}.\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

$$= \left(-\frac{5.5}{2} + \frac{1.6}{2}\right) \times 10^{-5} = -1.95 \times 10^{-5}$$

Jauge c : $e_c = \varepsilon_{ij} n_j n_i = \left[\begin{pmatrix} -5.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{pmatrix}.10^{-5}.\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right].\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.6 \end{pmatrix}.10^{-5}.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1.6 \times 10^{-5}$

2. Au point Q, quel est le changement de volume ?

$$\frac{\Delta V}{V} = tr\left(\varepsilon_{ij}\right) = tr\begin{pmatrix} -5.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{pmatrix}.10^{-5} = (-5.5 + 1.6 + 1.6).10^{-5} = -2.3 \times 10^{-5}$$

En déduire le tenseur de déformation déviatorique ?

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} tr\left(\varepsilon_{ij}\right)\delta_{ij} = \begin{pmatrix} -5.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1.6 & 0 \\ 0 & 0 & 1.6 \end{pmatrix}.10^{-5} + \frac{2.3}{3} \times 10^{-5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4.74 & 0 & 0 \\ 0 & 2.37 & 0 \\ 0 & 0 & 2.37 \end{pmatrix}.10^{-5}$$

3. Les équations de compatibilités sont-elles satisfaites, en un point quelconque du barreau ?

$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{il,jk} + \varepsilon_{jk,il}$ Soit
$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} &= 2\varepsilon_{xy,xy} \\ \varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} &= 2\varepsilon_{yz,yz} \\ \varepsilon_{xx,zz} + \varepsilon_{zz,xx} &= 2\varepsilon_{xz,xz} \\ \varepsilon_{xy,yz} + \varepsilon_{yz,xy} &= \varepsilon_{yy,xz} + \varepsilon_{xz,yy} \\ \varepsilon_{yz,zx} + \varepsilon_{zx,yz} &= \varepsilon_{zz,xy} + \varepsilon_{xy,zz} \\ \varepsilon_{zx,xy} + \varepsilon_{xy,zx} &= \varepsilon_{xx,yz} + \varepsilon_{yz,xx} \end{aligned}$$
Or $\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{pp}\delta_{ij}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{eh}\begin{pmatrix} A - 12\frac{Bxy}{h^2} & \frac{3(1+\nu)A}{2}\left[4\frac{y^2}{h^2} - 1\right] & 0 \\ \frac{3(1+\nu)A}{2}\left[4\frac{y^2}{h^2} - 1\right] & -\nu\left(A - 12\frac{Bxy}{h^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & -\nu\left(A - 12\frac{Bxy}{h^2}\right) \end{pmatrix}$$

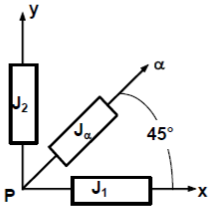
Donc les dérivées du tenseur de déformation non-nulles sont

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx,yy} = 0 \\ \varepsilon_{yy,xx} = 0 \\ \varepsilon_{xy,xy} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \varepsilon_{yy,zz} = 0 \\ \varepsilon_{zz,yy} = 0 \\ \varepsilon_{yz,yz} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \varepsilon_{xx,zz} = 0 \\ \varepsilon_{zz,xx} = 0 \\ \varepsilon_{xz,xz} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xy,yz} = 0 \\ \varepsilon_{yz,xy} = 0 \\ \varepsilon_{yy,xz} = 0 \\ \varepsilon_{xz,yy} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \varepsilon_{yz,zx} = 0 \\ \varepsilon_{zx,yz} = 0 \\ \varepsilon_{zz,xy} = \frac{12\nu B}{eh^3} \\ \varepsilon_{xy,zz} = 0 \end{cases} ; \begin{cases} \varepsilon_{zx,xy} = 0 \\ \varepsilon_{xy,zx} = 0 \\ \varepsilon_{xx,yz} = 0 \\ \varepsilon_{yz,xx} = 0 \end{cases}$$

Donc le champ est incompatible

Exercice 1.7 : Jauges de déformation



On considère un point P à la surface d'un corps en un endroit où ne s'applique aucune force extérieure. Les résultats d'enregistrés sur chaque jauge d'une rosette à 45° collée dans le plan tangent en P sont

$J_1 = 1061 \dfrac{\mu m}{mm}$; $J_\alpha = 237.5 \dfrac{\mu m}{mm}$; $J_2 = -586 \dfrac{\mu m}{mm}$

1. Quels sont les éléments du tenseur de déformation.
2. Dans quelle direction α' enregistrerait-on une dilatation linéaire nulle ?
3. Dans quel système d'axes enregistrerait-on une distorsion extremum ?

==

CORRECTION

==

1. Quels sont les éléments du tenseur de déformation.

Dans le plan on a le tenseur suivant $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{pmatrix}$ avec comme valeur issue des jauges

$\varepsilon_{11} = J_1 = 1061 \dfrac{\mu m}{mm}$; $\varepsilon_{22} = J_2 = -586 \dfrac{\mu m}{mm}$; $\varepsilon_{12} = J_\alpha - \dfrac{J_1 + J_2}{2} = 237.5 - \dfrac{1061 - 586}{2} = 0 \dfrac{\mu m}{mm}$

2. Dans quelle direction α' enregistrerait-on une dilatation linéaire nulle ?

$e_{\alpha'} = \dfrac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} + \dfrac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \cos 2\alpha' + \varepsilon_{12} \sin 2\alpha' = 0$; $\cos 2\alpha' = -\dfrac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}} = -\dfrac{237.5}{823.5}$ =>

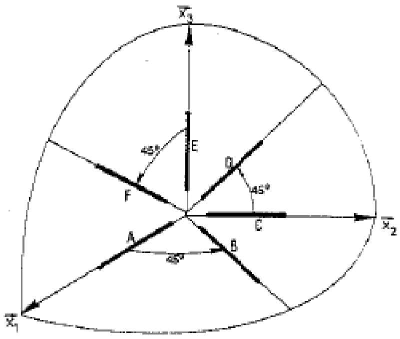
$\alpha' = 53.4°$

3. Dans quel système d'axes enregistrerait-on une distorsion extremum ?

Quand $\gamma_\theta = -\dfrac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \sin 2\theta + \varepsilon_{12} \cos 2\theta$ est maximum ou minimum

Soit $\dfrac{\partial \gamma_\theta}{\partial \theta} = 0 = -\dfrac{\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22}}{2} \cos 2\theta \Rightarrow \cos 2\theta = 0 \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ avec k un entier

Exercice 1.8 : Jauges d'extension



En vue de déterminer expérimentalement le tenseur des déformations au point M d'un ouvrage, on place autour de ce point un dispositif expérimental (6 jauges extensométriques voir figure jointe) permettant la mesure directe des allongements unitaires suivant les 6 directions considérées.

En appelant $\varepsilon_A, \varepsilon_B, \varepsilon_C, \varepsilon_D, \varepsilon_E, \varepsilon_F$ les 6 mesures effectuées, définir le tenseur des déformations au point M.

Application numérique :

$\varepsilon_A = 6 \times 10^{-3}$; $\varepsilon_C = 3 \times 10^{-3}$; $\varepsilon_E = 0$

$\varepsilon_B = 4.5 \times 10^{-3}$; $\varepsilon_D = 1.5 \times 10^{-3}$; $\varepsilon_F = 4.5 \times 10^{-3}$

==

CORRECTION

==

Les 6 jauges de déformation mesurent une dilatation linéaire. La dilatation linéaire est égale à dans le plan

$$(\vec{x}_1, \vec{x}_2)\ \varepsilon = n_i \varepsilon_{ij} n_j = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \varepsilon_{11}\cos^2\theta + \varepsilon_{22}\sin^2\theta + 2\varepsilon_{12}\cos\theta\sin\theta$$

.

La dilatation linéaire est égale à dans le plan $(\vec{x}_2, \vec{x}_3)\ \varepsilon = \varepsilon_{22}\cos^2\theta + \varepsilon_{33}\sin^2\theta + 2\varepsilon_{23}\cos\theta\sin\theta$.

La dilatation linéaire est égale à dans le plan $(\vec{x}_1, \vec{x}_3)\ \varepsilon = \varepsilon_{11}\cos^2\theta + \varepsilon_{33}\sin^2\theta + 2\varepsilon_{13}\cos\theta\sin\theta$.

Or les directions des 6 jauges sont : $\begin{cases} \vec{n}^A = \vec{x}_1 \\ \vec{n}^B = \cos(45°)\vec{x}_1 + \sin(45°)\vec{x}_2 \\ \vec{n}^C = \vec{x}_2 \\ \vec{n}^D = \cos(45°)\vec{x}_2 + \sin(45°)\vec{x}_3 \\ \vec{n}^E = \vec{x}_3 \\ \vec{n}^F = \cos(45°)\vec{x}_1 + \sin(45°)\vec{x}_3 \end{cases}$ soit $\begin{cases} \varepsilon_A = \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_B = \frac{1}{2}\varepsilon_{11} + \frac{1}{2}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_C = \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_D = \frac{1}{2}\varepsilon_{22} + \frac{1}{2}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_E = \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_F = \frac{1}{2}\varepsilon_{11} + \frac{1}{2}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{13} \end{cases}$

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_A \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_C \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_E \\ \varepsilon_{12} = \varepsilon_B - \frac{1}{2}\varepsilon_A - \frac{1}{2}\varepsilon_C \\ \varepsilon_{13} = \varepsilon_F - \frac{1}{2}\varepsilon_A - \frac{1}{2}\varepsilon_E \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_D - \frac{1}{2}\varepsilon_C - \frac{1}{2}\varepsilon_E \end{cases} ;\ \text{A.N.} \begin{cases} \varepsilon_{11} = 6 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_{22} = 3 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_{33} = 0 \\ \varepsilon_{12} = 4.5 \times 10^{-3} - \frac{1}{2} 6 \times 10^{-3} - \frac{1}{2} 3 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_{13} = 4.5 \times 10^{-3} - \frac{1}{2} 6 \times 10^{-3} - \frac{1}{2} 0 \\ \varepsilon_{23} = 1.5 \times 10^{-3} - \frac{1}{2} 3 \times 10^{-3} - \frac{1}{2} 0 \end{cases},\ \begin{cases} \varepsilon_{11} = 6 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_{22} = 3 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_{33} = 0 \\ \varepsilon_{12} = 0 \\ \varepsilon_{13} = 1.5 \times 10^{-3} \\ \varepsilon_{23} = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.9 : Jauges de déformation

Sur une pièce soumise à un chargement mécanique, on place une rosette d'extensométrie afin de déterminer l'état de déformation en ce point. La rosette est composée de trois jauges placées à 0°, 120° et 240° de la direction X_1 du repère carthésien défini pour exprimer le tenseur des déformations.

1. Les variations relatives de longueur suivantes ont été mesurées successivement à la surface d'une pièce :
   0,1 10^{-3}, 0,1415 10^{-3} et -0,2915 10^{-3}.
   Déduisez les composantes du tenseur des déformations, en supposant un état de déformation plan
2. Déterminez la dilatation linéaire une direction à 60° de la direction X_1.
3. Déterminer le tenseur de déformation déviatorique.

===

CORRECTION

===

1. **Les variations relatives de longueur suivantes ont été mesurées successivement à la surface d'une pièce : 0,1 10^{-3}, 0,1415 10^{-3} et -0,2915 10^{-3}.**
   Déduisez les composantes du tenseur des déformations, en supposant un état de déformation plan

Les 3 jauges mesurent des dilatations linéaires l'une selon l'axe 1, la deuxième selon une direction de 120° par rapport à cet axe 1 et la dernière selon une direction de 240°.Une dilatation linéaire est défini par : $e_\theta = \varepsilon_{ij} n_i n_j$

avec $\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit $e_\theta = \varepsilon_{11} n_1^2 + 2\varepsilon_{12} n_1 n_2 + \varepsilon_{22} n_2^2$. Les trois directions de mesure sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$, soit le système d'équation à résoudre : $\begin{cases} e_0 = \varepsilon_{11} \\ e_{120} = \dfrac{\varepsilon_{11}}{4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_{12} + \dfrac{3}{4}\varepsilon_{22} \\ e_{240} = \dfrac{\varepsilon_{11}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_{12} + \dfrac{3}{4}\varepsilon_{22} \end{cases}$ soit

$$\begin{cases} \varepsilon_{11} = e_0 \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(e_{240} - e_{120}) \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{2(e_{240} + e_{120}) - e_0}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{11} = 0,1.10^{-3} \\ \varepsilon_{12} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(-0,2915 - 0,1415).10^{-3} = -0,25.10^{-3} \\ \varepsilon_{22} = \dfrac{2(-0,2915 + 0,1415) - 0,1}{3}.10^{-3} = -0,1333.10^{-3} \end{cases}$$

2. **Déterminez la dilatation linéaire une direction à 60° de la direction X1.**

Le vecteur de direction à 60° est : $\begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ soit $e_{60} = \dfrac{\varepsilon_{11}}{4} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_{12} + \dfrac{3}{4}\varepsilon_{22} = e_{240}$

3. **Déterminer le tenseur de déformation déviatorique.**

Le tenseur déviatorique est défini par : $\varepsilon_{ij}^d = \varepsilon_{ij} - \dfrac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$

or la trace du tenseur est égale à $\varepsilon_{kk} = (0,1 - 0,1333).10^{-3} = -0,0333.10^{-3}$ donc le déviateur :

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0,1 + \dfrac{0,0333}{3} & -0,25 & 0 \\ -0,25 & -0,1333 + \dfrac{0,0333}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{0,0333}{3} \end{pmatrix}.10^{-3} = \begin{pmatrix} 0,1111 & -0,25 & 0 \\ -0,25 & -0,1222 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0111 \end{pmatrix}.10^{-3}$$

Exercice 1.10 : Déformations principales

On considère un solide soumis à un état de déformation uniforme, représenté par le tenseur des déformations suivant :

1. Déterminer les déformations principales par la méthode de votre choix.
2. Quel est l'angle de rotation entre le repère initial et le repère principal ?

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}07 & 0 \\ -0{,}07 & -0{,}04 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .10^{-3}$$

==

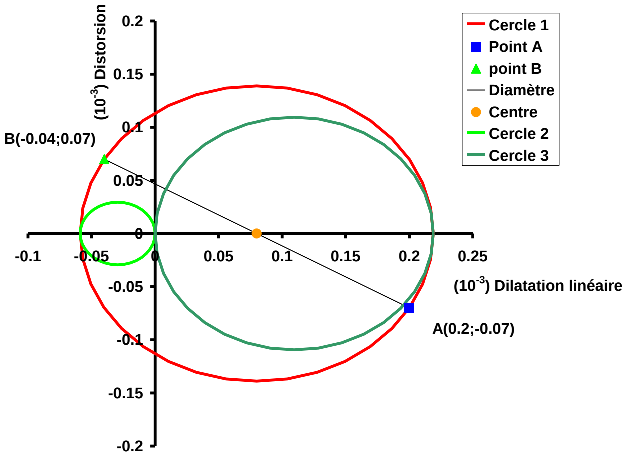
CORRECTION

==

1. Déterminer les déformations principales par la méthode de votre choix.

Une des déformations principales est égale à $\lambda_1 = 0\,MPa$. Pour les 2 autres il faut soit résoudre $\det(\varepsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$ ou de passer par le cercle de Mohr.

Cercle de Mohr :Le centre du cercle à pour abscisse : $x_C = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2} = \frac{0.2 - 0.04}{2} 10^{-3} = 0.08 \times 10^{-3}$ .Le rayon est égale à $Rayon = \sqrt{(0.2 - 0.08)^2 + (0.07)^2} \times 10^{-3} = 0.139 \times 10^{-3}$. Donc les deux autres valeurs propres sont $\lambda_2 = x_c + Rayon = 0.219 \times 10^{-3}$, $\lambda_3 = x_c - Rayon = -0.059 \times 10^{-3}$. Pour avoir les déformations principales il suffit de classer les valeurs de λ_i telle que $\varepsilon_I > \varepsilon_{II} > \varepsilon_{III}$ donc $\varepsilon_I = 0.219 \times 10^{-3}; \varepsilon_{II} = 0; \varepsilon_{III} = -0.059 \times 10^{-3}$



Résoudre $\det(\varepsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$ **:**

$\det(\varepsilon_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0 \Rightarrow (0.2 \times 10^{-3} - \lambda)(-0.04 \times 10^{-3} - \lambda) - (0.07 \times 10^{-3})^2 = 0 \Rightarrow$

$\lambda^2 - 0.16 \times 10^{-3}\lambda - 0.0129 \times 10^{-6} = 0$. Soit $\Delta = (0.16 \times 10^{-3})^2 + 4 \times 0.0129 \times 10^{-6} = 0.0772 \times 10^{-6}$

Donc les deux autres valeurs propres sont $\lambda_2 = \frac{0.16 \times 10^{-3} + \sqrt{0.0772 \times 10^{-6}}}{2} = 0.219 \times 10^{-3}$,

$\lambda_3 = \frac{0.16 \times 10^{-3} - \sqrt{0.0772 \times 10^{-6}}}{2} = -0.059 \times 10^{-3}$. Pour avoir les déformations principales il suffit de classer les valeurs de λ_i telle que $\varepsilon_I > \varepsilon_{II} > \varepsilon_{III}$ donc $\varepsilon_I = 0.219 \times 10^{-3}; \varepsilon_{II} = 0; \varepsilon_{III} = -0.059 \times 10^{-3}$

2. Quel est l'angle de rotation entre le repère initial et le repère principal ?

$$\theta = \frac{1}{2} atn\left(\frac{y_A}{x_A - x_c}\right) = \frac{1}{2} atn\left(\frac{-0.07}{0.2 - 0.08}\right) = 15.13°$$