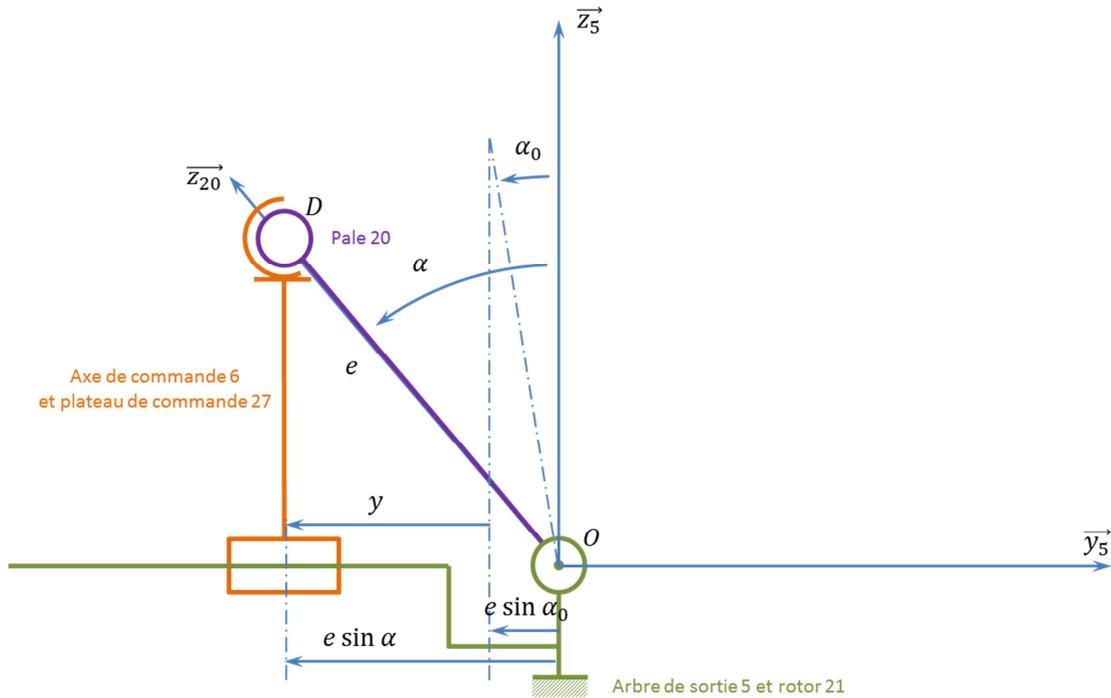


**Banque PT 2012**  
**Epreuve de Sciences Industrielles B**  
**Remarques et notes de calcul**

R1 -



R2 -

D'après la figure,  $y$  étant négatif :  $y = e \sin \alpha_0 - e \sin \alpha = e(\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$ .

Dans le sujet «  $e$  » n'est pas mentionné et le candidat peut être induit en erreur.

R3 -

$$c = y_{maxi} - y_{mini}$$

$$y_{maxi} = e(\sin \alpha_0 - \sin \alpha_{mini})$$

$$y_{mini} = e(\sin \alpha_0 - \sin \alpha_{maxi})$$

$$c = e(\sin \alpha_{maxi} - \sin \alpha_{mini})$$

D'après le cahier des charges (page T6),  $\alpha$  varie de  $-30^\circ$  à  $48^\circ$  et d'après le tableau 2 (D 9/11):

- $e \cdot \sin(-30^\circ) \simeq 30 \cdot (-0.5) \simeq -15 \text{ mm}$
- $e \cdot \sin(48^\circ) \simeq 30 \cdot 0,74 \simeq 22.3 \text{ mm}$
- $c \simeq 37.29 \text{ mm}$

Cette valeur de la course est compatible avec le cahier des charges.

R4 - Les contacts entre les pièces sont des centrages courts, ce qui justifie le rotulage. L'arrêt axial n'est pas effectué, le choix d'une liaison linéaire annulaire est donc justifié.

R5 -

$$\begin{aligned} \{T_{aéro}\} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ F_{portance} & 0 \\ F_{trainee} & 0 \end{pmatrix}_{(P, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)} \\ \{T_A\} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{pmatrix}_{(A, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)} \\ \{T_B\} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{pmatrix}_{(B, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)} \\ \{T_{29 \rightarrow 20}\} &= \begin{pmatrix} X_C & L_C \\ Y_C & M_C \\ Z_C & N_C \end{pmatrix}_{(C, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)} \\ \{T_{27 \rightarrow 20}\} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ Y_D & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(D, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)} \quad \text{glisseur d'axe } (D, \vec{y}_5) \end{aligned}$$

R6 - Il s'agit d'une liaison pivot d'axe  $\vec{y}_5$  et de centre O: (on considèrera alpha comme un angle de réglage)

$$\begin{aligned} \{V_{pale/bati}\} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Omega & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(O, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)} \\ \overline{V(G, pale/bati)} &= \overline{V(O, pale/bati)} + \overline{GO} \wedge \overline{\Omega(pale/bati)} \\ \overline{V(G, pale/bati)} &= -\left(r_p + \frac{L_p}{2}\right) \vec{x}_5 \wedge \Omega \vec{y}_5 = -\Omega \left(r_p + \frac{L_p}{2}\right) \vec{z}_5 = -\Omega \left(r_p + \frac{L_p}{2}\right) \cdot (\cos \alpha \vec{z}_{20} + \sin \alpha \vec{y}_{20}) \\ \{V_{pale/bati}\} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Omega & 0 \\ 0 & -\Omega \left(r_p + \frac{L_p}{2}\right) \end{pmatrix}_{(G, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)} \end{aligned}$$

R7 - Si on considère que la pale a un profil symétrique, les plans  $(\vec{z}_{20}, \vec{x}_{20})$  et  $(\vec{y}_{20}, \vec{z}_{20})$  sont des plans de symétrie perpendiculaires. La matrice  $I_{pale}(G)$  est donc symétrique.

Il aurait peut-être été préférable de :

- présenter plus précisément le profil de la pale ; préciser que le point G est le centre d'inertie de la pale.

R8 - La résultante cinétique s'exprime par :

$$\overline{p}_{20/1} = m_p \cdot \overline{V(G, 20/1)} = -m_p \cdot \Omega \left(r_p + \frac{L_p}{2}\right) \cdot \vec{z}_5$$

Au point G, centre d'inertie de la pale, le moment cinétique s'exprime ainsi (attention à mettre la matrice et le vecteur dans la même base, par exemple  $\mathcal{R}_{20}$ ) :

$$\overline{\sigma}_{20/1}(G) = I_{pale}(G) \cdot \overline{\Omega(20/1)} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{20}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \Omega \cos \alpha \\ -\Omega \sin \alpha \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{20}} = \Omega \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \cos \alpha \\ -I_3 \sin \alpha \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{20}}$$

En projetant  $\vec{y}_{20}$  dans  $\mathcal{R}_5$  :

$$\begin{aligned} \vec{y}_{20} &= \cos \alpha \vec{y}_5 + \sin \alpha \vec{z}_5 \\ \vec{z}_{20} &= \cos \alpha \vec{z}_5 - \sin \alpha \vec{y}_5 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\sigma_{20/1}(G)} = \Omega \begin{bmatrix} 0 \\ I_2 \cos^2 \alpha + I_3 \sin^2 \alpha \\ I_2 \cos \alpha \sin \alpha - I_3 \sin \alpha \cos \alpha \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_5}$$

$$\{\mathcal{C}_{20/1}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Omega(I_2 \cos^2 \alpha + I_3 \sin^2 \alpha) \\ -m_p \Omega \left(r_p + \frac{L_p}{2}\right) & \Omega(I_2 \cos \alpha \sin \alpha - I_3 \sin \alpha \cos \alpha) \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)}$$

R9 - Par définition de la résultante dynamique :

$$\overrightarrow{d_{20/1}(G)} = m_p \cdot \overrightarrow{\Gamma(G, 20/1)} = m_p \left[ \frac{d \left( -\Omega \left( r_p + \frac{L_p}{2} \right) \vec{z}_5 \right)}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = -m_p \Omega \left( r_p + \frac{L_p}{2} \right) \dot{\theta} \vec{x}_5 = -m_p \Omega^2 \left( r_p + \frac{L_p}{2} \right) \vec{x}_5$$

$$R10 - F_C = 0,27 \cdot \left( \frac{3660 \cdot 2\pi}{60} \right)^2 \cdot (0,183 + 0,144) \simeq 0,27 \cdot 366^2 \cdot 0,327 \simeq 120^2 \simeq 14\,400 \text{ N}$$

R11 - Au point G, on a :

$$\overrightarrow{\delta_{20/1}(G)} = \left[ \frac{d \overrightarrow{\sigma_{20/1}(G)}}{dt} \right]_{\mathcal{R}_0} = \Omega(I_2 \cos \alpha \sin \alpha - I_3 \sin \alpha \cos \alpha) \dot{\theta} \vec{x}_5 = \Omega(I_2 - I_3) \cos \alpha \sin \alpha \dot{\theta} \vec{x}_5$$

Le moment dynamique sera nul si  $I_2 = I_3$  ou si  $\alpha = 0$ . ( $\alpha \in [-30; 48]$ ).

R12 - D'après le théorème de la résultante dynamique appliqué au solide 20, on a :

$$\sum \overrightarrow{R_{ext \rightarrow 20}} = \overrightarrow{d_{20/1}}$$

$$X_C = -m_p \Omega^2 \left( r_p + \frac{L_p}{2} \right)$$

$$F_{portance} + Y_A + Y_B + Y_C + Y_D = 0$$

$$F_{trainée} + Z_A + Z_B + Z_C = 0$$

Pour la suite,  $\alpha = 0$ .

R13 - D'après le théorème du moment dynamique appliqué au solide 20, au point G, on a :

$$\sum \overrightarrow{M_{G, ext \rightarrow 20}} = \overrightarrow{\delta_{G, 20/1}} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{M(G, aéro \rightarrow 20)} = \overrightarrow{GP} \wedge \overrightarrow{R(aéro \rightarrow 20)} = \left( d_p - \frac{L_p}{2} \right) \vec{x}_5 \wedge (F_p \vec{y}_5 + F_t \vec{z}_5) = \left( d_p - \frac{L_p}{2} \right) \cdot (F_p \vec{z}_5 - F_t \vec{y}_5)$$

$$\{T_{aéro}\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_{portance} & 0 \\ F_{trainée} & 0 \end{Bmatrix}_{(P, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ F_{portance} & -\left( d_p - \frac{L_p}{2} \right) F_t \\ F_{trainée} & \left( d_p - \frac{L_p}{2} \right) F_p \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)}$$

$$\overrightarrow{M(G, A \rightarrow 20)} = \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{R(A \rightarrow 20)} = -\left( r_p - r_A + \frac{L_p}{2} \right) \vec{x}_5 \wedge (Y_A \vec{y}_5 + Z_A \vec{z}_5) = -\left( r_p - r_A + \frac{L_p}{2} \right) \cdot (Y_A \vec{z}_5 - Z_A \vec{y}_5)$$

$$\{T_A\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{(A, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & \left(r_p - r_A + \frac{L_p}{2}\right) Z_A \\ Z_A & -\left(r_p - r_A + \frac{L_p}{2}\right) Y_A \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)}$$

$$\overrightarrow{M(G, B \rightarrow 20)} = \overrightarrow{GB} \wedge \overrightarrow{R(B \rightarrow 20)} = -\left(r_p - r_B + \frac{L_p}{2}\right) \vec{x}_5 \wedge (Y_B \vec{y}_5 + Z_B \vec{z}_5) = -\left(r_p - r_B + \frac{L_p}{2}\right) \cdot (Y_B \vec{z}_5 - Z_B \vec{y}_5)$$

$$\{T_B\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & 0 \\ Z_B & 0 \end{Bmatrix}_{(B, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_B & \left(r_p - r_B + \frac{L_p}{2}\right) Z_B \\ Z_B & -\left(r_p - r_B + \frac{L_p}{2}\right) Y_B \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M(G, C \rightarrow 20)} &= \overrightarrow{M(C, C \rightarrow 20)} + \overrightarrow{GC} \wedge \overrightarrow{R(B \rightarrow 20)} = \overrightarrow{M(C, C \rightarrow 20)} - \left(r_p - r_C + \frac{L_p}{2}\right) \vec{x}_5 \wedge (X_C \vec{x}_5 + Y_C \vec{y}_5 + Z_C \vec{z}_5) \\ &= \overrightarrow{M(C, C \rightarrow 20)} - \left(r_p - r_C + \frac{L_p}{2}\right) \cdot (Y_C \vec{z}_5 - Z_C \vec{y}_5) \end{aligned}$$

$$\{T_{29 \rightarrow 20}\} = \begin{Bmatrix} X_C & L_C \\ Y_C & M_C \\ Z_C & N_C \end{Bmatrix}_{(C, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)} = \begin{Bmatrix} X_C & L_C \\ Y_C & M_C + \left(r_p - r_C + \frac{L_p}{2}\right) Z_C \\ Z_C & N_C - \left(r_p - r_C + \frac{L_p}{2}\right) Y_C \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)}$$

$$\overrightarrow{M(G, D \rightarrow 20)} = \overrightarrow{GD} \wedge \overrightarrow{R(D \rightarrow 20)} = \left[-\left(r_p - r_D + \frac{L_p}{2}\right) \vec{x}_5 - e \vec{z}_5\right] \wedge Y_D \vec{y}_5 = -\left(r_p - r_D + \frac{L_p}{2}\right) \cdot Y_D \vec{z}_5 + e Y_D \vec{x}_5$$

$$\{T_{27 \rightarrow 20}\} = \begin{Bmatrix} 0 & e Y_D \\ Y_D & 0 \\ 0 & -\left(r_p - r_D + \frac{L_p}{2}\right) Y_D \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)}$$

L'application du TMD en G donne donc :

$$\begin{aligned} L_C &= 0 \\ -\left(d_p - \frac{L_p}{2}\right) F_t + \left(r_p - r_A + \frac{L_p}{2}\right) Z_A + \left(r_p - r_B + \frac{L_p}{2}\right) Z_B + M_C + \left(r_p - r_C + \frac{L_p}{2}\right) Z_C + e Y_D &= 0 \\ \left(d_p - \frac{L_p}{2}\right) F_p - \left(r_p - r_A + \frac{L_p}{2}\right) Y_A - \left(r_p - r_B + \frac{L_p}{2}\right) Y_B + N_C - \left(r_p - r_C + \frac{L_p}{2}\right) Y_C - \left(r_p - r_D + \frac{L_p}{2}\right) Y_D &= 0 \end{aligned}$$

R14 -

Les actions devant être gardées sont  $X_C$  pour « reprendre » la résultante dynamique et  $L_C$  pour « reprendre » le moment dû à la commande  $Y_D$ .

R15 -

Torseur d'action mécanique dans la liaison pale/faisceau :

$$\{T_{29/20}\} = \begin{Bmatrix} -m_p \Omega^2 \left(r_p + \frac{L_p}{2}\right) & -e Y_D \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(C, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)}$$

R16 – Les deux sollicitations que subit la pièce 29 sont une sollicitation de traction et une de torsion.

R17 – Suivant les hypothèses adoptées, on peut utiliser le PFS dans le but de déterminer le torseur de cohésion. Si on ne considère que les efforts dus à la résultante dynamique, seule la composante  $X_c$  est prise en compte dans ce cas, on peut préciser que l'on utilise le théorème de la résultante statique.

R18 – Il y a uniquement l'effort  $F_c \cdot \vec{x}_5$ ; donc :

$$\{T_{coh\ 1}(x)\} = \begin{Bmatrix} F_c & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(H(x), \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)}$$

Il s'agit d'une sollicitation en traction.

R19 – En traction, la contrainte normale s'écrit :

$$\sigma = \frac{F_c}{S_f}$$

R20 –

$$R_e \geq s \cdot \sigma$$

R21 – Application numérique :

$$R_e \geq 1,2 \cdot \frac{13\ 000}{\frac{\pi D_f^2}{4}} \simeq \frac{12}{10} \cdot \frac{13\ 000 \cdot 4}{\pi \cdot 36} \simeq \frac{4}{1} \cdot \frac{1\ 300 \cdot 1}{9} \simeq 650\ MPa$$

R22 – Moment quadratique polaire d'une poutre à section circulaire :

$$I_f = \frac{\pi D_f^4}{32}$$

R23 –

$$\{T_{coh\ 2}(x)\} = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(H(x), \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_5)}$$

R24 –

On calcule l'angle de torsion unitaire :

$$\Theta = \frac{\|\overrightarrow{M(x)}\|}{G \cdot I_f}$$

L'angle de rotation de la section est alors :

$$\gamma(x) = \Theta \cdot x = \frac{\|\overrightarrow{M(x)}\|}{G \cdot I_f} x$$

R25 –

$$\gamma(L_f) = \alpha - \alpha_0 = \frac{M_t}{G \cdot I_f} L_f$$
$$M_t = (\alpha - \alpha_0) \frac{G \cdot I_f}{L_f}$$

$$M_{maxi} = \max \left( (\alpha_{maxi} - \alpha_0) \frac{G \cdot I_f}{L_f}, -(\alpha_{mini} - \alpha_0) \frac{G \cdot I_f}{L_f} \right)$$

NB : Les valeurs sont en fait les mêmes car  $\alpha_0$  est au milieu de la plage d'évolution.

R26 -

$$\tau_{max} = \frac{M_{max}}{I_f} \cdot \frac{D_f}{2} = (\alpha_{maxi} - \alpha_0) \frac{G \cdot D_f}{L_f \cdot 2}$$

R27

-

$$\tau_{max} \simeq 1\,300 \text{ MPa}$$

R28 -

$$\overline{M(M, 5 \rightarrow 7)} = \overline{MS} \wedge \overline{FS} = -R_p \overline{y_0} \wedge (F_T \overline{x_0} - F_R \overline{y_0} + F_A \overline{z_0}) = R_p F_T \overline{z_0} - R_p F_A \overline{x_0}$$

Le théorème du moment statique appliqué à l'arbre 7 en projection sur l'axe  $\overline{z_0}$  donne donc :

$$C_e = -F_t R_p$$

R29 -

$$\begin{aligned} F_T &= F_S \cos \phi \\ F_V &= F_S \sin \phi \\ F_R &= F_V \cos \delta \\ F_A &= F_V \sin \delta \end{aligned}$$

Au bilan :

$$F_R = F_V \cos \delta = F_S \sin \phi \cos \delta = F_T \frac{\sin \phi \cos \delta}{\cos \phi} = F_T \tan \phi \cos \delta$$

R30 -

$$F_A = F_V \sin \delta = F_S \sin \phi \sin \delta = \frac{F_T}{\cos \phi} \sin \phi \sin \delta = F_T \tan \phi \sin \delta$$

R31 -

$$\begin{aligned} F_T &= \frac{C_e}{R_p} = \frac{20}{50 \cdot 10^{-3}} = 400 \text{ N} \\ F_R &= F_T \tan \phi \cos \delta = 400 \tan 20 \cos 42,44 \simeq 400 \cdot 0,4 \cdot 0,7 \simeq 112 \text{ N} \\ F_A &= F_T \tan \phi \sin \delta = 400 \tan 20 \sin 42,44 \simeq 400 \cdot 0,4 \cdot 0,7 \simeq 112 \text{ N} \end{aligned}$$

R32 -

$$\begin{aligned} F_R^E &= \sqrt{80^2 + 80^2} \simeq 80 \cdot 1,4 \simeq 112 \text{ N} \\ F_R^F &= \sqrt{480^2 + 20^2} \simeq 480 \text{ N} \end{aligned}$$

Calcul de

$$\begin{aligned} -\frac{F_R^E}{2Y_E} + \frac{F_R^F}{2Y_F} + F_A &= -\frac{\sqrt{80^2 + 80^2}}{2 \cdot 1,7} + \frac{\sqrt{480^2 + 20^2}}{2 \cdot 1,4} - 100 = -\frac{80\sqrt{2}}{2 \cdot 1,7} + \frac{\sqrt{480^2 + 20^2}}{2 \cdot 1,4} - 100 \\ &\simeq -\frac{80\sqrt{2}}{2 \cdot 1,7} + \frac{\sqrt{480^2}}{2 \cdot 1,4} - 100 \simeq -40 + 160 - 100 > 0 \text{ N} \end{aligned}$$

On a donc :

$$F_Z^F = \frac{F_R^F}{2Y_F} \approx \frac{480}{2 \cdot 1,4} \approx 160 \text{ N}$$
$$F_Z^E = F_Z^F - F_A \approx 60 \text{ N}$$

Pour le roulement E :

$$\frac{F_Z}{F_R} \approx \frac{60}{112} \approx 0,5 > e \Rightarrow P_E = 0,4F_R + 1,7 F_Z \approx 0,4 \cdot 112 + 1,7 \cdot 60 \approx 150 \text{ N}$$

Pour le roulement F :

$$\frac{F_Z}{F_R} \approx \frac{160}{480} \approx 0,33 < e \Rightarrow P_F = F_R \approx 480 \text{ N}$$

R33 -

$$L = \left(\frac{C}{P}\right)^{\frac{10}{3}} \approx \left(\frac{8000}{150}\right)^{\frac{10}{3}} \approx 50^3 \approx 125\,000 \text{ millions de tours}$$
$$\frac{125\,000 \cdot 10^6}{3\,660} \approx 31 \cdot 10^6 \text{ min}$$
$$\frac{31 \cdot 10^6}{60} \approx 0,5 \cdot 10^6 \text{ heures}$$
$$\frac{50 \cdot 10^4}{12} \approx 40000 \text{ jours}$$
$$\frac{40000}{365} \approx 100 \text{ années}$$

100 années de fonctionnement.

Fonctionnement de 100 ans sans avoir à changer le roulement :

- Valeur importante
  - Pièce difficile à changer donc dimensionnée avec une grande durée de vie ;
  - Les coefficients de sécurité imposent une si grande durée de vie, même si, éventuellement les roulements sont changés plus souvent ;
  - L'aéronautique impose une fiabilité de 99% alors que classiquement la fiabilité utilisée dans les calculs est de 90%.

R34 - Influence de la précharge axiale

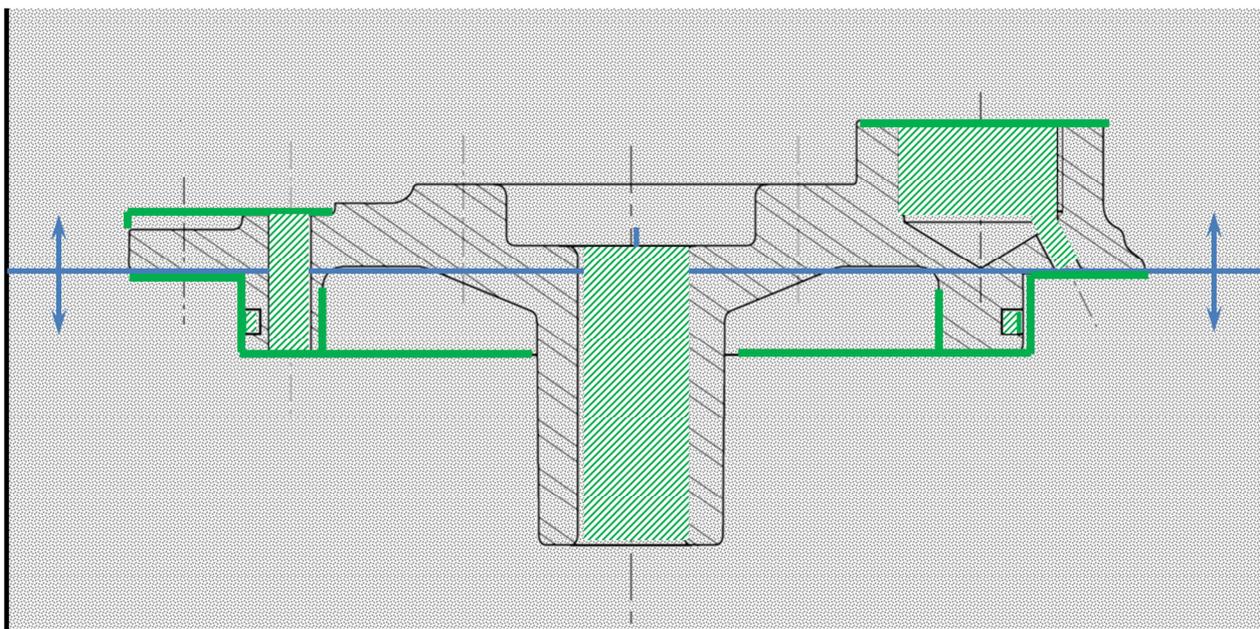
L'ajout d'une précharge permettrait de diminuer la durée de ce roulement mais d'augmenter celle du second.

R35 -

- EN AC-AlSi12 : alliage d'aluminium pour la fonderie avec 12% de silicium. Même si c'est un aluminium moulable, ses performances mécaniques sont faibles (à vérifier).
- On peut par exemple proposer les alliages suivants :
  - EN AW 5754 (AlMg3) Aluminium avec 3% de magnésium.
  - EN AC-AlCu5MgTi

R36 -

 Matière (pas de noyau)



R37 -

