

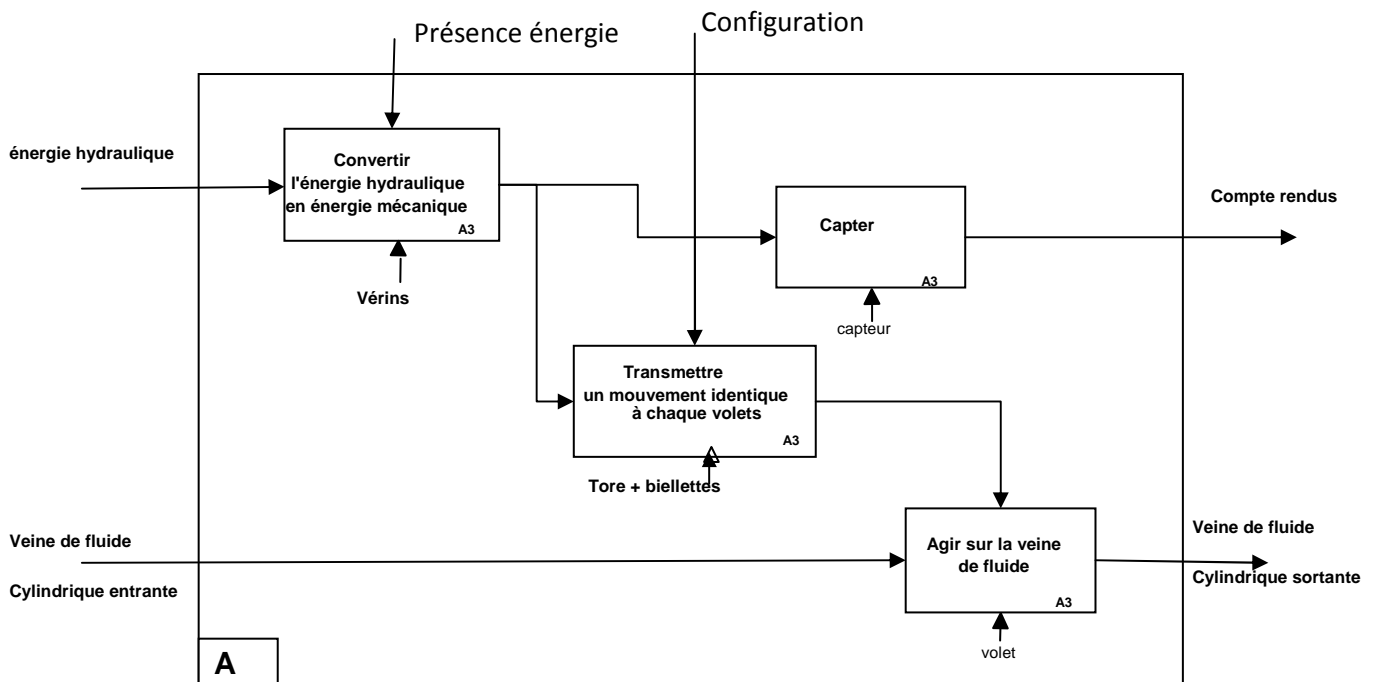
TUYÈRE À OUVERTURE VARIABLE POUR BANC D'ESSAIS DE TURBORÉACTEURS

PARTIE A

ANALYSE FONCTIONNELLE ET STRUCTURELLE

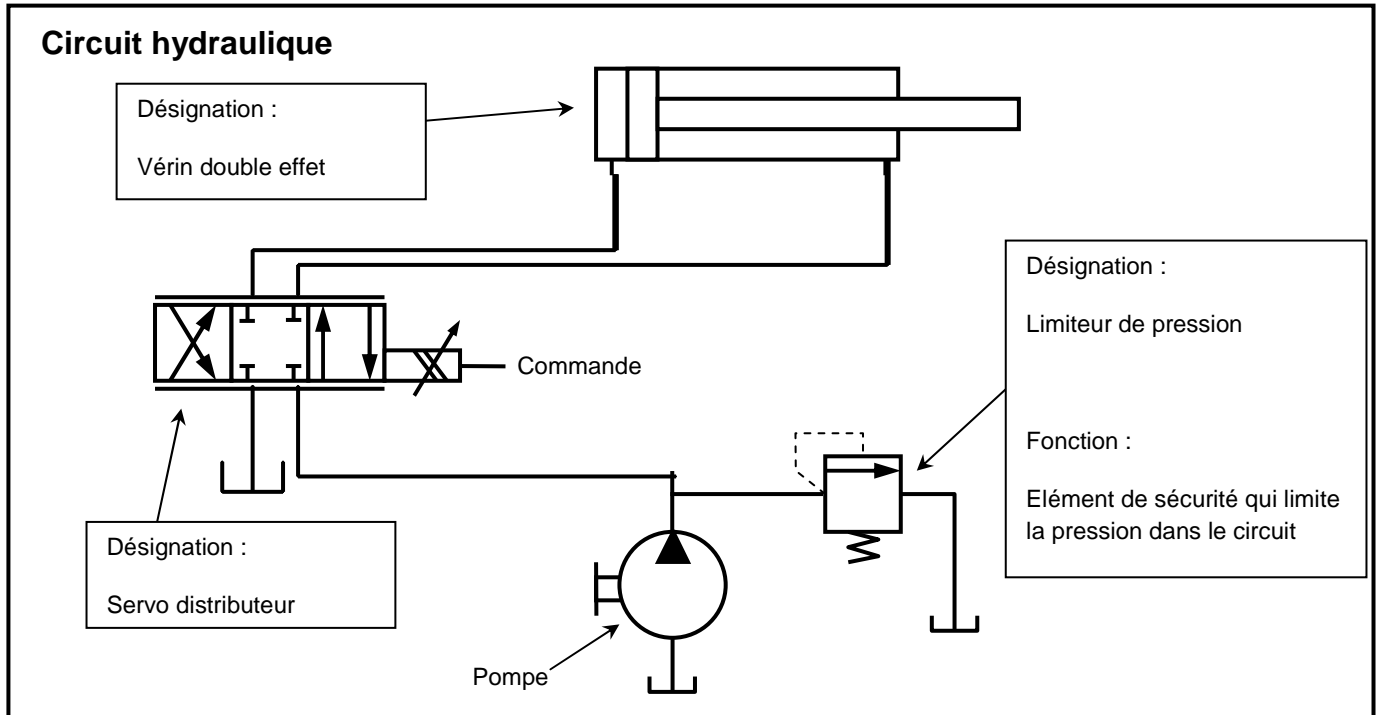
Question 1

À partir de la présentation du système et des diagrammes fournis en annexe 1, compléter le diagramme SADT de niveau A3 ébauché sur le cahier réponse.



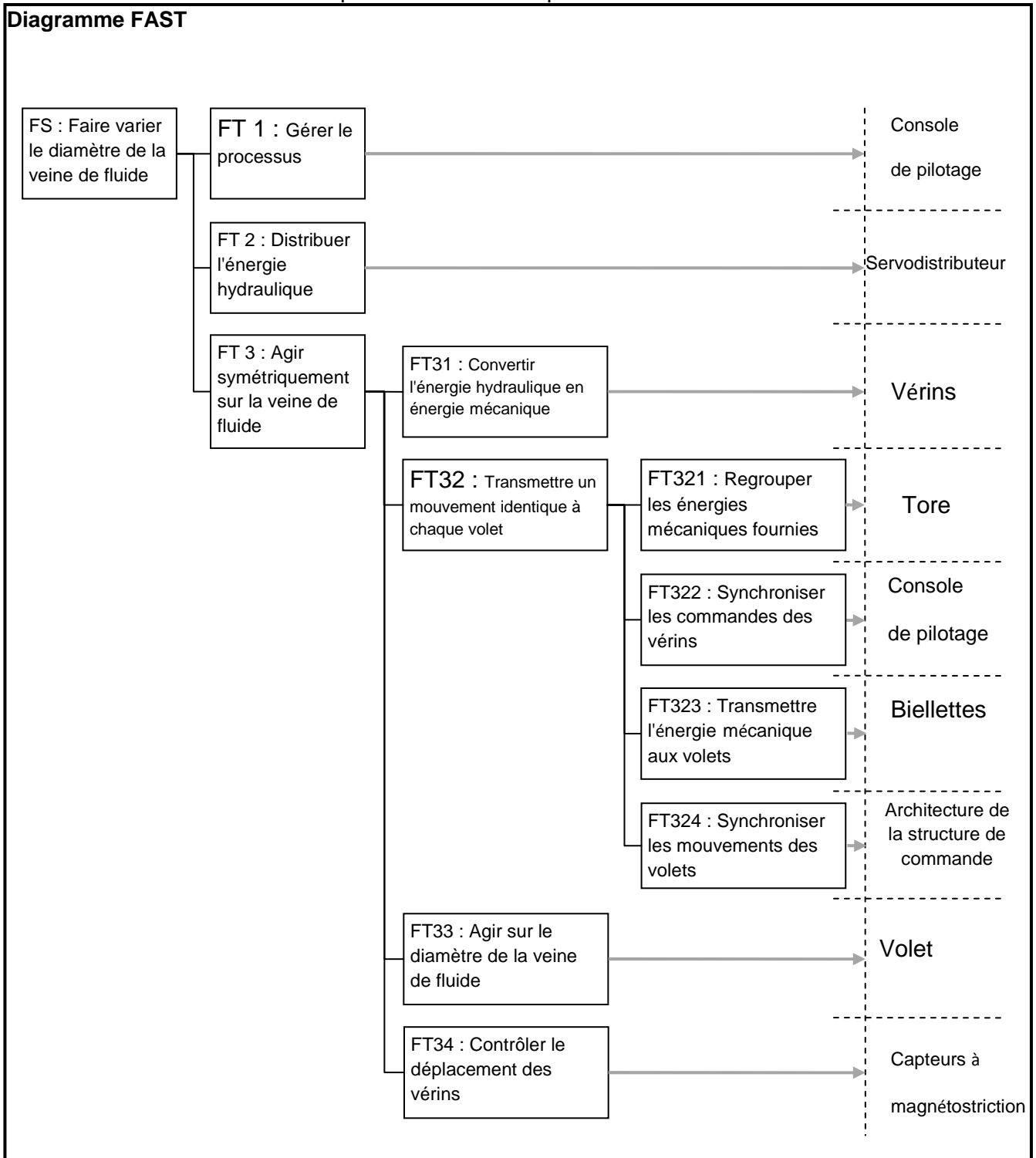
Question 2

Compléter le schéma de câblage hydraulique du vérin en reliant les composants. Préciser la désignation et/ou la fonction des éléments indiqués.



Question 3

Après lecture du diagramme FAST proposé sur le cahier réponse, indiquer les éléments réalisant les différentes fonctions du niveau le plus bas de la description.



PARTIE B

**MODÉLISATION DE LA CHAÎNE FONCTIONNELLE
RÉALISANT LA FONCTION DE SERVICE
"FAIRE VARIER LE DIAMÈTRE DE LA VEINE DE FLUIDE"**

B1 – MODÉLISATION DU COMPORTEMENT CINÉMATIQUE DU MÉCANISME

Question 4

Écrire la relation vectorielle traduisant la fermeture géométrique de la chaîne de solides. En déduire les deux équations scalaires en projection dans la base (\vec{x}_1, \vec{y}_1) .

$$\overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CO} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} x + l \cos \beta + h \sin \alpha - l = 0 \\ h + l \sin \beta - h \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

Question 5

En éliminant l'inconnue β , exprimer α en fonction de x . Puis le diamètre D de la veine fluide en fonction de α et D_0 le diamètre initial de la tuyère.

$$\begin{cases} l \cos \beta = l - x - h \sin \alpha \\ l \sin \beta = -h + h \cos \alpha \end{cases}$$

$$l^2 = l^2 - 2lx + x^2 - 2h(l-x)\sin \alpha + h^2 \sin^2 \alpha + h^2 - 2h^2 \cos \alpha + h^2 \cos^2 \alpha$$

$$2h(l-x)\sin \alpha + 2h^2 \cos \alpha = x^2 - 2lx + 2h^2$$

$$(l-x)\sin \alpha + h \cos \alpha = \frac{x^2 - 2lx + 2h^2}{2h}$$

On pose : $\tan \varphi = \frac{h}{l-x}$

$$\cos \varphi \sin \alpha + \sin \varphi \cos \alpha = \frac{x^2 - 2lx + 2h^2}{2h}$$

$$\sin(\alpha + \varphi) = \frac{x^2 - 2lx + 2h^2}{2h}$$

$$\alpha = \text{Arc sin} \left(\frac{x^2 - 2lx + 2h^2}{2h} \right) - \text{Arc tan} \left(\frac{h}{l-x} \right)$$

$$D = D_0 - 2L \sin \alpha$$

Question 6

On donne figure 8 le tracé de la fonction $D(x)$ déduite de la question précédente. Peut-on linéariser cette fonction sur cet intervalle ? Si oui, proposer une expression affine de D en fonction de x .

Oui, $D = -2x + D_0$

Question 7

À partir du résultat de la question précédente, déduire du cahier des charges relatif à la fonction de service les niveaux des critères à valider pour la commande des vérins (course, temps de réponse, précision).

$C=100\text{mm}$

$T_{5\%} = 4\text{s}$

$\varepsilon_s = 0$

$\varepsilon_T = 1\text{mm}$ pour 50mm/s sur D

$\dot{D} = -2\dot{x}$

B2 – MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DU SERVO-DISTRIBUTEUR HYDRAULIQUE

Question 8

À partir de la courbe de débit et des caractéristiques fournies, proposer une valeur numérique pour le gain K_D du servo-distributeur (on négligera pour cela la légère non linéarité perceptible sur la courbe).

$K_D=0,6\text{l/min/v}$

Question 9

Calculer la vitesse maximale V_{\max} (en m/s) de déplacement de la tige du vérin. Vérifier alors que les performances maximales des composants hydrauliques choisis sont compatibles avec les exigences de rapidité spécifiées au cahier des charges.

$Q = 6\text{l/min} = 10^{-4}\text{m}^3/\text{s}$

$Q = SV \Rightarrow V = \frac{Q}{S} = \frac{10^{-4}}{20 \cdot 10^{-6}} = 5\text{m/s}$

Le cahier des charges donne : $\Delta D = 200\text{mm}$ en 4s

Donc $V_{\text{moy}} = \frac{100}{4} = 25\text{mm/s} = 0,025\text{m/s}$ à comparer au 5m/s donc vérifié.

B3 – MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DU CAPTEUR DE DÉPLACEMENT

Question 10

En tenant compte de la résolution du capteur, donner la valeur numérique du gain K_C du capteur.

La résolution du capteur est : $5\mu\text{m}$

Donc $K_c = \frac{1}{5 \cdot 10^{-6}} = 2 \cdot 10^5 \text{m}^{-1}$

Question 11

Donner la valeur maximale prise par $\hat{x}(t)$ lors du déplacement du vérin. Combien de bits sont nécessaires pour coder cette information ? Est-ce compatible avec le capteur choisi ?

$\hat{x}_{\max} = 100\text{mm} \rightarrow \frac{100}{5 \cdot 10^{-3}} = 2 \cdot 10^4 \text{positions}$

Ce qui nécessite 15 bits (car $2^{15}=32768$), donc le capteur est compatible.

Question 12

Quelle est la spécificité du code Gray ? En quoi est-elle intéressante pour une mesure par incrémentation ?
 Une seule variable change de valeur d'une position à une autre. Cela évite les aléas de continuité et donc des erreurs de position.

B4 – MODÉLISATION DU COMPORTEMENT DU VÉRIN – HYPOTHÈSE FLUIDE INCOMPRESSIBLE

Question 13

Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin $H_V(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$.

$$H_V(p) = \frac{X(p)}{Q(p)} = \frac{1}{Sp}$$

Question 14

Donner alors l'expression de la fonction de transfert en boucle fermée $H_{BF}(p) = \frac{X(p)}{X_{ref}(p)}$. La mettre sous

la forme $F(p) = \frac{K}{1 + T.p}$ en précisant les expressions de K et de T.

$$H_{BF}(p) = \frac{X(p)}{X_{ref}(p)} = \frac{K_c \frac{K_p K_u K_D}{Sp}}{1 + K_c \frac{K_p K_u K_D}{Sp}} = \frac{1}{1 + \frac{S}{K_c K_p K_u K_D} p}$$

$K=1$

$$T = \frac{S}{K_c K_p K_u K_D}$$

Question 15

Quelle est alors l'écart de position consécutif à une consigne de 100 mm ? Est-ce compatible avec la performance spécifiée dans le cahier des charges ?
 $\epsilon_S = 0$, car F(p) est du premier ordre et est de gain statique 1, ce qui est compatible avec la performance spécifiée dans le cahier des charges.

Question 16

Proposer un réglage du correcteur permettant de valider la performance de rapidité.

$t_{5\%} = 3T = 4s$

$\Rightarrow T = \frac{4}{3}$

$$\frac{S}{K_c K_p K_u K_D} = \frac{4}{3} \Rightarrow K_p = \frac{4K_c K_u K_D}{3S}$$

B5.1 – Modélisation du comportement dynamique du mécanisme

Question 17

Déterminer, avec les hypothèses précédentes, le moment d'inertie par rapport à l'axe (C, Z) $I_{(V,Cz)}$ d'un volet en fonction de la masse volumique ρ et des caractéristiques géométriques H, L, d, a et e .

$$I_{(V,Cz)} = I_{(1,Cz)} + I_{(2,Cz)}$$

$$I_{(1,Cz)} = \int_0^a \int_0^H \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} r(x^2 + y^2) dx dy dz$$

$$I_{(1,Cz)} = \rho a \int_0^H \frac{a^3}{3} + a \frac{H^3}{3} dz$$

$$I_{(2,Cz)} = \rho d \int_0^L \frac{e^3}{3} + e \frac{L^3}{3} dz$$

$$I_{(V,Cz)} = \rho \left(a^2 H \frac{a^2}{3} + \frac{H^2}{3} \right) + \rho L e \left(\frac{e^2}{3} + \frac{L^2}{3} \right)$$

Question 18

Exprimer l'énergie cinétique galiléenne de l'ensemble de solides **(3+4+5)** en fonction de $M_t, I_{(V,Cz)}, \dot{x}$ et $\dot{\alpha}$.

Hypothèse : on néglige les caractéristiques d'inertie des biellettes, en plus de sa masse.

$$Ec_{(3+4+5)/R_0} = \frac{1}{2} M_t \dot{x}^2 + 4 \frac{1}{2} I_{(V,Cz)} \dot{\alpha}^2$$

Question 19

La figure 11 de l'annexe 4 donne la variation de l'angle α en fonction de x obtenue à la question 5. On cherche à linéariser la loi de variation sous la forme $\alpha = -k_1 x$. Donner la valeur de k_1 en précisant son unité.

$$\alpha = -k_1 x$$

$$-40 \frac{\pi}{180} = -k_1 \cdot 100$$

$$k_1 = 7 \cdot 10^{-3} \text{ mm}^{-1}$$

Question 20

Après avoir précisé la méthode utilisée pour définir la masse équivalente recherchée, exprimer la masse équivalente M_{eq} en fonction de $M_t, I_{(V,Cz)}$ et k_1 .

Pour définir la masse équivalente, nous calculons l'énergie cinétique

$$\dot{\alpha} = -k_1 \dot{x}$$

$$Ec_{(3+4+5)/R_0} = \frac{1}{2} \left(M_t \dot{x}^2 + 4 I_{(V,Cz)} k_1^2 \dot{x}^2 \right)$$

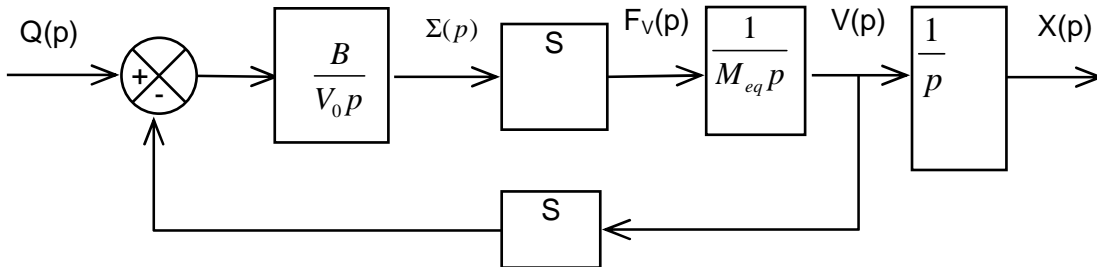
$$M_{eq} = M_t + 4 k_1^2 I_{(V,Cz)}$$

Question 21

Faire l'application numérique pour $M_t = 22 \text{ kg}$ et $I_{(V,\Omega)} = 8 \cdot 10^4 \text{ kg} \cdot \text{mm}^2$.
 $M_{eq} = 37,68 \text{ kg}$

Question 22

A partir des équations [1], [2] et [3], compléter le schéma-bloc du document réponse en indiquant les fonctions de transferts de chaque bloc.



B5.2 – Prise en compte de l'action de l'air sur les volets

Question 23

Exprimer la puissance galiléenne développée par les actions mécaniques extérieures et intérieures à l'ensemble de solides **(3+4+5)** en fonction de F_a , F_V , c , $\dot{\alpha}$ et \dot{x} . Montrer qu'elle peut se mettre sous la forme : $(F_V - F_{eq}) \cdot \dot{x}$ où F_{eq} représente l'action équivalente de l'air sur un seul volet ramenée sur l'axe du vérin. On donnera alors l'expression de F_{eq} en fonction F_a , c et k_1 .

$$P_{int} = 0$$

$$P_{ext} = F_V \dot{x} + c F_a \dot{\alpha}$$

$$P_{ext} = (F_V - k_1 c F_a) \dot{x}$$

$$F_{eq} = k_1 c F_a$$

Question 24

En première approximation, on suppose que F_a est de la forme $F_a = -k_2 \cdot \alpha$. Exprimer F_R en fonction c , k_1 , k_2 et x . On rappelle que F_R est l'action mécanique résistante équivalente pour quatre volets. Mettre le résultat sous la forme $F_R = K_F \cdot x$ et donner l'expression de K_F .

$$F_R = -4k_1 c k_2 \cdot \alpha$$

$$F_R = 4k_1^2 c k_2 \cdot x$$

$$K_F = 4k_1^2 c k_2$$

Question 25

Calculer la valeur numérique de K_F avec $k_2 = \frac{15}{4} \cdot 10^3 \text{ N/rad}$ et $c = 200 \text{ mm}$.

$$K_F = 147$$

Question 26

Écrire le théorème de la résultante dynamique appliquée au solide **3** dans son mouvement par rapport à **1** en projection sur \dot{x}_1 , comme s'il était seul en remplaçant l'ensemble des quatre groupes de solides **4** et **5** par les caractéristiques équivalentes déterminées précédemment.

Remarque : Calcul d'un point de vue électronicien, je préfère utiliser le théorème de l'énergie cinétique sur un ensemble mobile. Nos élèves ont pu être déstabilisés par cette présentation.

$$\frac{d\left(\frac{1}{2}M_{eq}\dot{x}^2\right)}{dt} = (F_v - F_R)\dot{x}$$

$$M_{eq}\ddot{x} = (F_v - F_R)\dot{x}$$

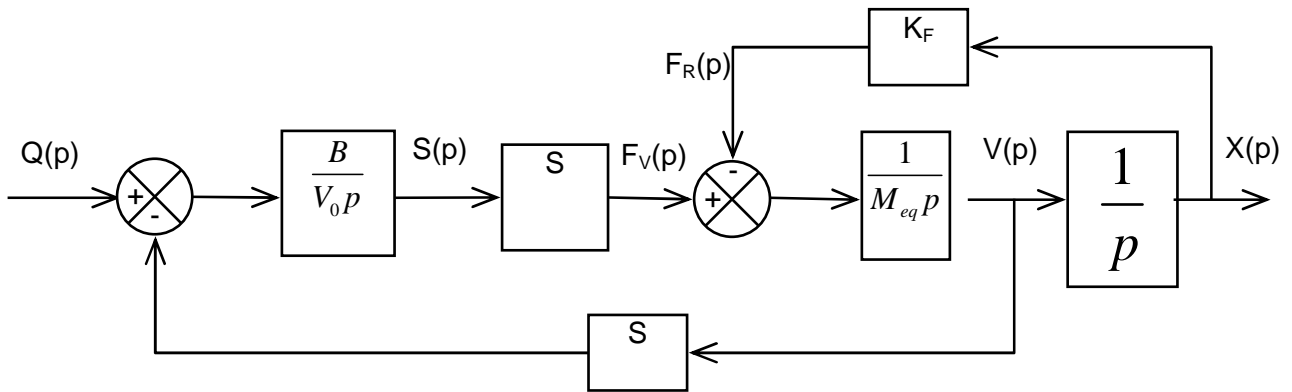
$$M_{eq}\dot{x} = F_v - F_R \xrightarrow{L} M_{eq}p^2 X(p) = F_v(p) - F_R(p)$$

$$X(p) = \frac{F_v(p) - F_R(p)}{M_{eq}p^2}$$

$$V(p) = \frac{F_v(p) - F_R(p)}{M_{eq}p}$$

Question 27

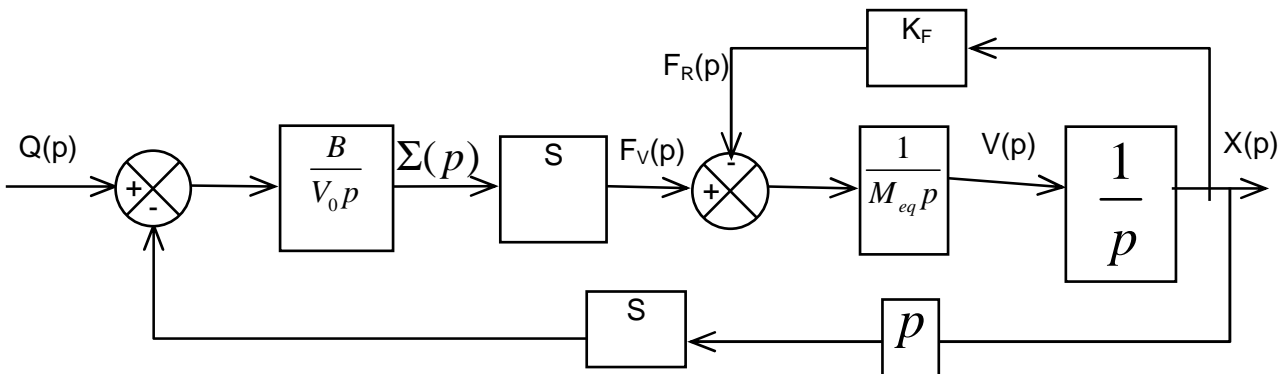
Compléter le schéma-bloc du document réponse en indiquant les fonctions de transfert de chaque bloc.



Question 28

Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin ainsi modélisé $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$.

On donnera le résultat sous la forme suivante : $H_v(p) = \frac{K_v}{p(1+a_2 p^2)}$ en précisant les expressions de K_v et a_2 .



$$H_{Bl}(p) = \frac{\frac{1}{M_{\acute{e}q} p^2}}{1 + \frac{K_F}{M_{\acute{e}q} p^2}} = \frac{1}{K_F + M_{\acute{e}q} p^2}$$

$$H_v(p) = \frac{\frac{B}{V_0 p} S \frac{1}{K_F + M_{\acute{e}q} p^2}}{1 + \frac{B}{V_0 p} S^2 \frac{1}{K_F + M_{\acute{e}q} p^2} p}$$

$$H_v(p) = \frac{\frac{B}{V_0 p} S \frac{1}{K_F + M_{\acute{e}q} p^2}}{1 + \frac{B}{V_0} S^2 \frac{1}{K_F + M_{\acute{e}q} p^2}}$$

$$H_v(p) = \frac{\frac{BS}{V_0 p}}{K_F + M_{\acute{e}q} p^2 + \frac{BS^2}{V_0}}$$

$$H_v(p) = \frac{\frac{BS}{V_0}}{K_F + \frac{BS^2}{V_0}} \cdot p \left(1 + \frac{M_{\acute{e}q}}{K_F + \frac{BS^2}{V_0}} p^2 \right)$$

$$K_v = \frac{\frac{BS}{V_0}}{K_F + \frac{BS^2}{V_0}}$$

$$a_2 = \frac{M_{\acute{e}q}}{K_F + \frac{BS^2}{V_0}}$$

B5.3 – Validation du modèle de comportement du vérin

Question 29

Donner l'expression de la forme canonique de la fonction de transfert en boucle fermée

$H_{BF}(p) = \frac{X(p)}{X_{ref}(p)}$. On donnera le résultat en fonction de K_C , K_U , K_D , K_p , K_v et a_2 .

$$H_{BF}(p) = \frac{X(p)}{X_{ref}(p)} = \frac{K_c K_p K_u K_D \frac{K_V}{p(1+a_2 p^2)}}{1 + K_c K_p K_u K_D \frac{K_V}{p(1+a_2 p^2)}}$$

$$H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{p(1+a_2 p^2)}{K_c K_p K_u K_D K_V}}$$

$$H_{BF}(p) = \frac{1}{1 + \frac{p}{K_c K_p K_u K_D K_V} + \frac{a_2}{K_c K_p K_u K_D K_V} p^3}$$

Question 30

Par application du critère Routh, discuter de la stabilité du système ainsi modélisé. Conclure sur le modèle de comportement du vérin établi en question 28.

$$\frac{a_2}{K_c K_p K_u K_D K_V} p^3 + \frac{1}{K_c K_p K_u K_D K_V} p + 1 = 0$$

$\frac{a_2}{K_c K_p K_u K_D K_V}$	$\frac{1}{K_c K_p K_u K_D K_V}$	0
ε	1	
$\varepsilon \frac{1}{K_c K_p K_u K_D K_V} - \frac{a_2}{K_c K_p K_u K_D K_V}$		0
ε		

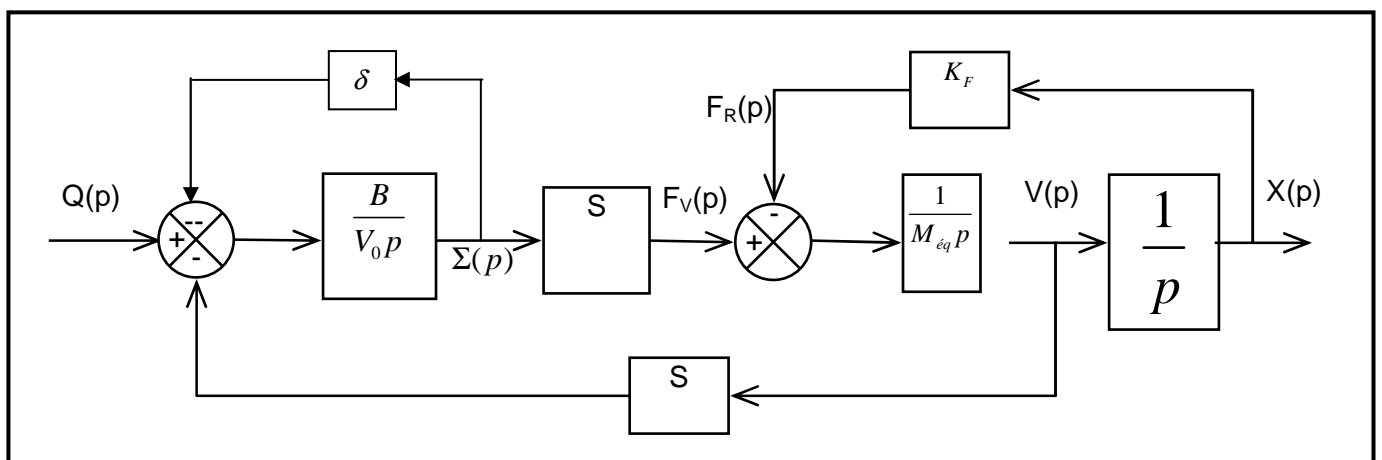
Le troisième terme de la première colonne est négatif alors que les précédents sont positifs, donc le système est instable.

Ce modèle de comportement ne permet pas l'étude du système car il ne prend pas en compte les phénomènes d'amortissement dont l'effet est stabilisant.

B5.4 – Prise en compte d'un débit de fuite

Question 31

Proposer une modification du schéma-bloc donné sur le cahier réponse afin de prendre en compte le débit de fuite entre les chambres du vérin.



Question 32

Donner l'expression de la fonction de transfert du vérin ainsi modélisé $H_v(p) = \frac{X(p)}{Q(p)}$.

On donnera le résultat sous la forme suivante : $H_v(p) = \frac{K_v}{1+a_1p+a_2p^2+a_3p^3}$ en précisant les expressions de K_v , a_1 , a_2 et a_3 .

$$H_{B1}(p) = \frac{\frac{B}{V_0 p}}{1 + \frac{\delta B}{V_0 p}} = \frac{\frac{1}{\delta}}{1 + \frac{V_0}{\delta B} p}$$

$$H_v(p) = \frac{\frac{B}{\delta B + V_0 p} S \frac{1}{K_F + M_{\acute{e}q} p^2}}{1 + \frac{B}{\delta B + V_0 p} S^2 \frac{1}{K_F + M_{\acute{e}q} p^2} p}$$

$$H_v(p) = \frac{BS}{(\delta B + V_0 p)(K_F + M_{\acute{e}q} p^2) + BS^2 p}$$

$$H_v(p) = \frac{BS}{\delta BK_F + K_F V_0 p + \delta B M_{\acute{e}q} p^2 + V_0 M_{\acute{e}q} p^3 + BS^2 p}$$

$$H_v(p) = \frac{\frac{S}{\delta K_F}}{1 + \frac{K_F V_0 + BS^2}{\delta BK_F} p + \frac{M_{\acute{e}q}}{K_F} p^2 + \frac{V_0 M_{\acute{e}q}}{\delta BK_F} p^3}$$

$$K_v = \frac{S}{\delta K_F}$$

$$a_1 = \frac{K_F V_0 + BS^2}{\delta BK_F}$$

$$a_2 = \frac{M_{\acute{e}q}}{K_F}$$

$$a_3 = \frac{V_0 M_{\acute{e}q}}{\delta BK_F}$$

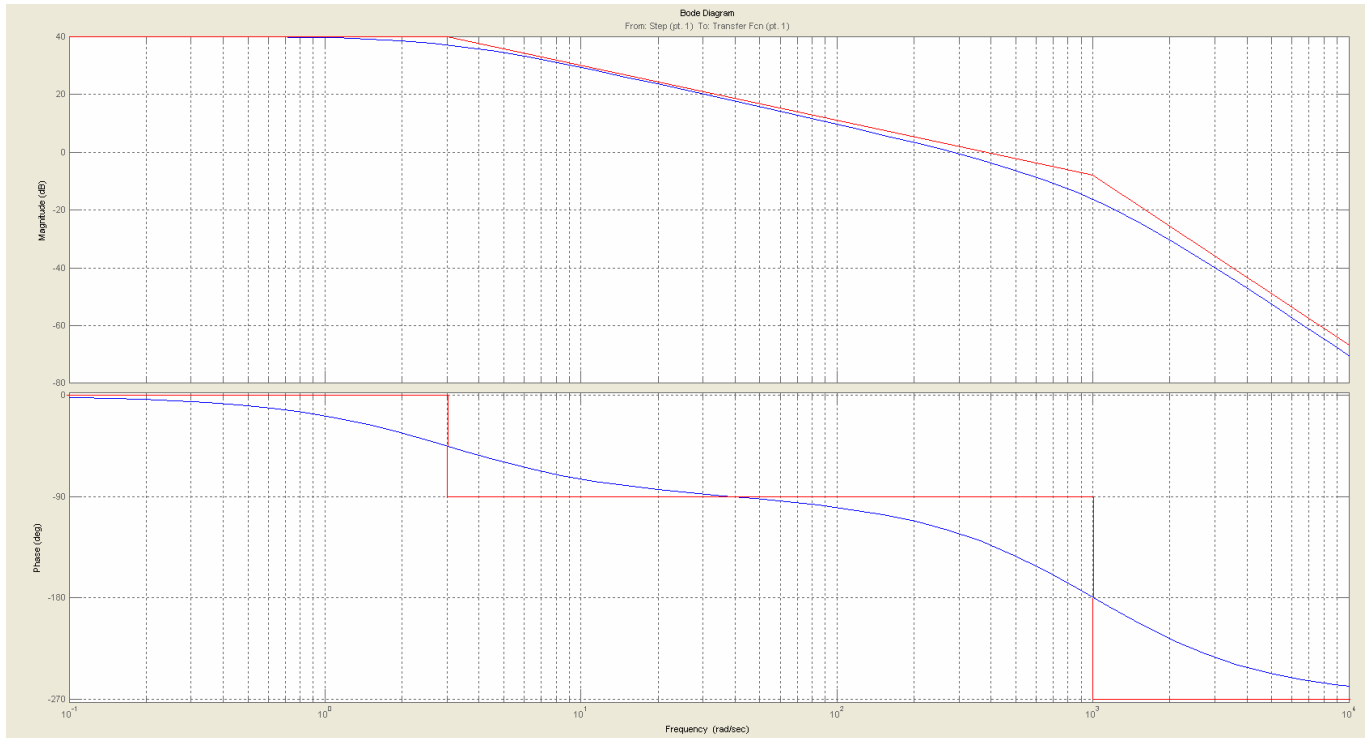
PARTIE C

**SYNTHÈSE DU CORRECTEUR
DE LA COMMANDE EN POSITION D'UN VÉRIN**

C1 – MODÉLISATION DE LA BOUCLE OUVERTE NON CORRIGÉE

Question 33

Proposer à partir de ce tracé, une expression pour la fonction de transfert $H_V(p)$. On justifiera la réponse en traçant les diagrammes asymptotiques correspondants et en déterminant tous les coefficients utiles. On précise que les coefficients ont été choisis afin d'optimiser la rapidité du vérin.



La forme de la fonction de transfert $H_V(p)$ est :

$$H_V(p) = \frac{K_V}{(1 + \tau p) \left(1 + \frac{2\xi}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2} \right)}$$

Pour optimiser la rapidité du vérin, on choisit $\xi = 0,7$

$$\tau = \frac{1}{3}$$

$$\omega_0 = 1000$$

$$40 = 20 \log(K_V) \Rightarrow \log(K_V) = 2$$

$$K_V = 100$$

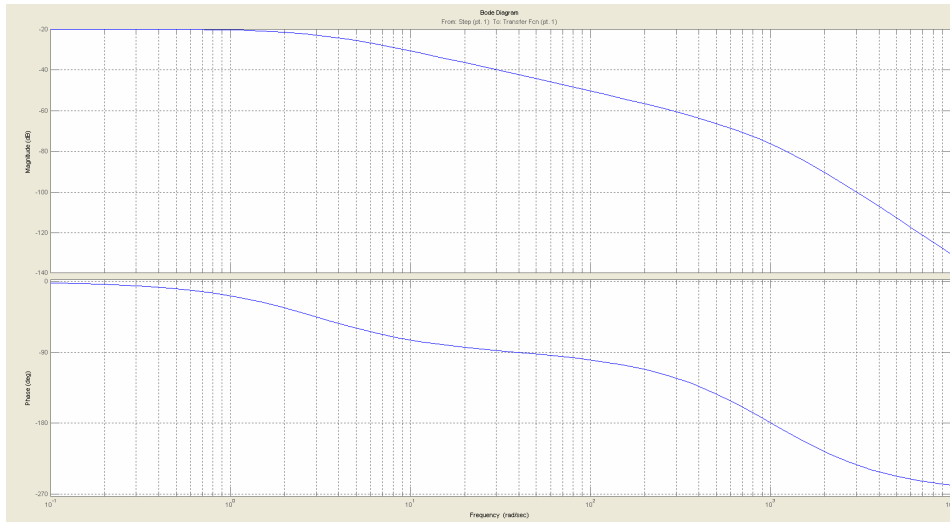
Question 34

En déduire la valeur du gain statique en boucle ouverte non corrigée du système. On notera ce terme K_{BONC} . Tracer en rouge, sur le Bode de la question 33, le diagramme de la fonction de transfert en boucle ouverte du système complet non corrigé.

$$K_{BONC} = K_c K_u K_D K_V$$

$$K_{BONC} = 0,1$$

$$20 \log(0,1) = -20$$



C2 – ANALYSE DES PERFORMANCES EN CORRECTION PROPORTIONNELLE

Question 35

Donner l'ordre et la classe du système ainsi corrigé.

Le système ainsi corrigé est d'ordre 3 et de classe 0

Question 36

Pour $K_p = 10$, donner les valeurs de l'erreur statique pour une consigne de 100 mm et de l'erreur de traînage pour une consigne de vitesse de 25 mm/s. Le système peut-il répondre aux exigences de précision du cahier des charges ?

$$K = \frac{K_{BONC}}{1 + K_{BONC}} = \frac{1}{2}$$

$$\epsilon_s = 50mm$$

$$\epsilon_v = \infty$$

Non, Le système ne peut pas répondre aux exigences de précision du cahier des charges.

Question 37

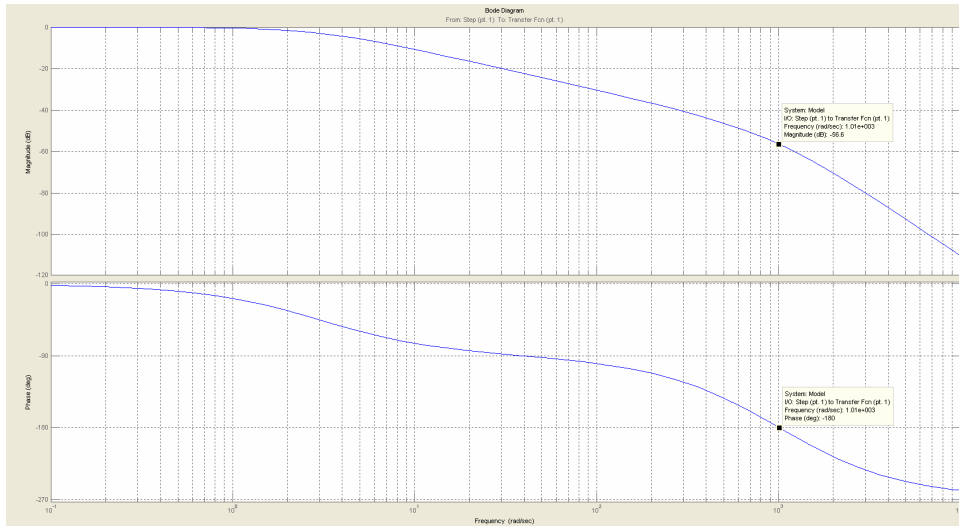
Le système comporte-t-il un risque d'instabilité ? Si oui, préciser pour quelle valeur de K_p l'instabilité est possible (on attend une méthode graphique et un résultat sous la forme d'une puissance de 10). Conclure.

Oui, le système comporte un risque d'instabilité

Si pour $\varphi = -180^\circ$, K_p est tel que le gain G est positif.

$$K_p = 6300$$

Même avec une telle valeur de K_p , le système ne répondrait pas aux exigences en terme de précision. Le cahier des charges n'est pas validé.

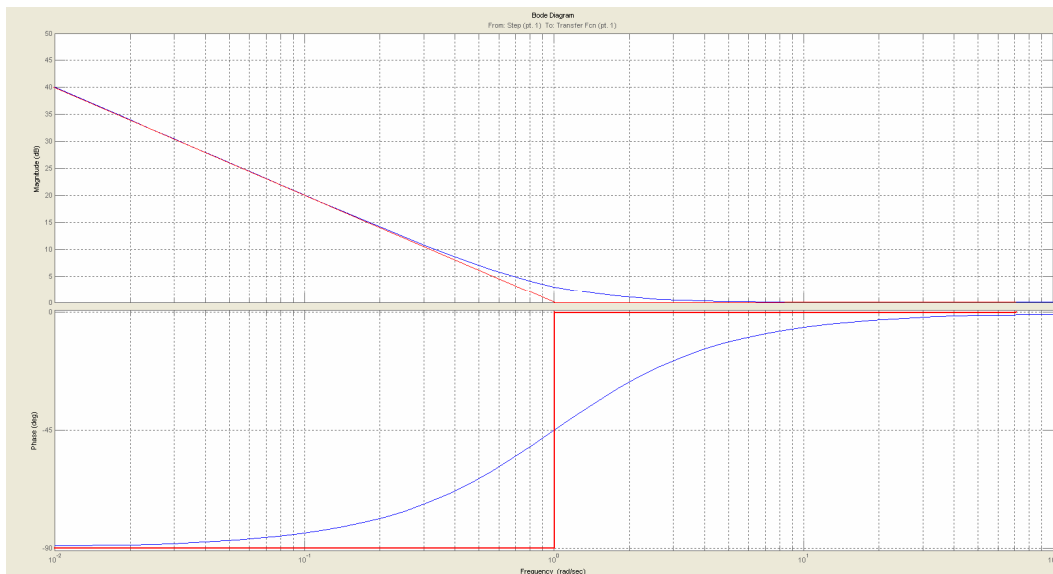


C3 – RÉGLAGE D'UNE CORRECTION PROPORTIONNELLE ET INTÉGRALE

Question 38

Tracer une représentation dans le plan de Bode de la fonction C(p). On demande le diagramme asymptotique ainsi que l'allure des courbes réelles.

$$C(p) = K_i \frac{C\ddot{\theta}}{1 + T_i \cdot p \frac{\ddot{\theta}}{\theta}} + K_i \frac{C\ddot{\theta}}{1 + T_i \cdot p \frac{\ddot{\theta}}{\theta}}$$



Question 39

Donner l'ordre et la classe du système ainsi corrigé.

L'ordre du système ainsi corrigé est 3 et la classe 1.

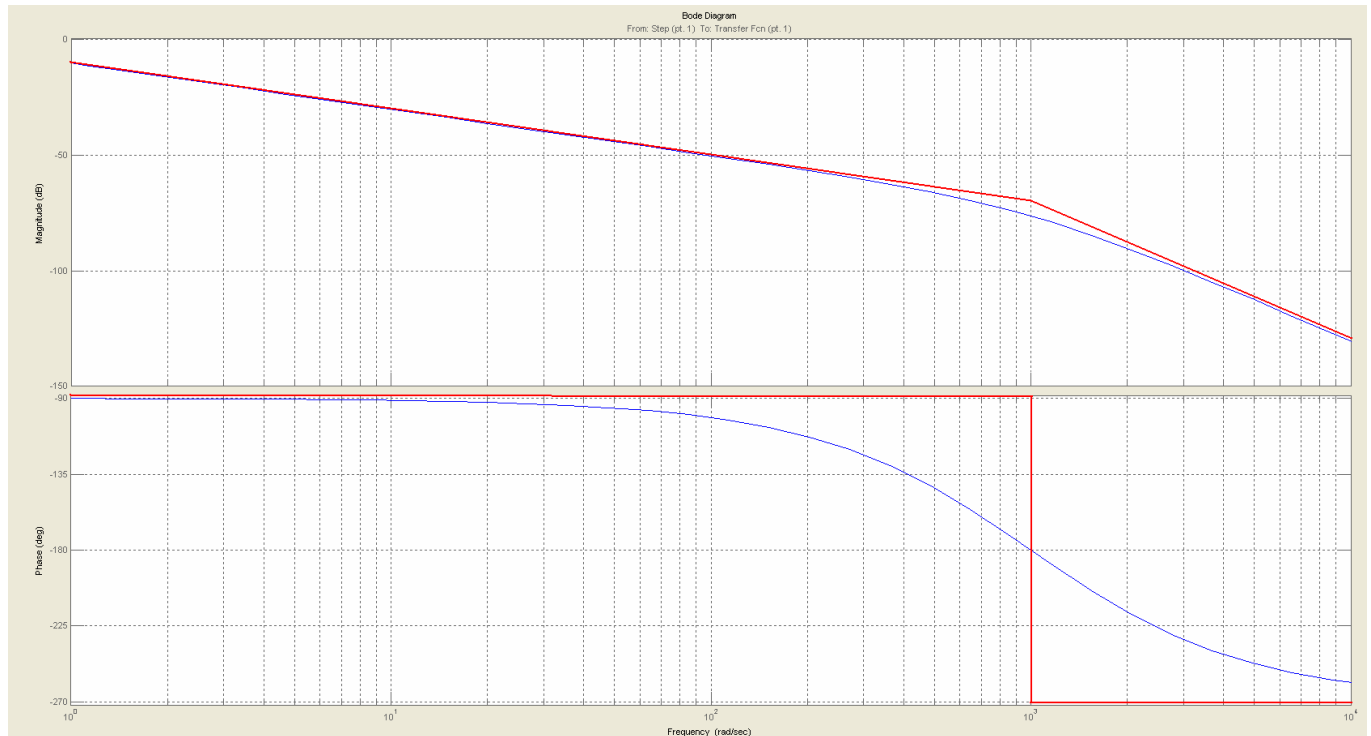
Question 40

Quelle valeur de T_i permet de compenser le mode le plus lent du système non corrigé ?

$$T_i = \frac{1}{3}$$

Question 41

Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert en boucle ouverte du système ainsi corrigé pour $K_i = 1$ (asymptotes et allures des courbes réelles).



Question 42

Quelle valeur de K_i garantit les exigences de précision du cahier des charges ?
Le système ainsi corrigé est de classe 1. On peut donc en déduire que :

- $\varepsilon_s = 0mm$
- $\varepsilon_v = \frac{V_0}{K_{BO}}$ avec $K_{BO} = \frac{K_{BONC} K_i}{T_i}$

Le cahier des charges impose $\varepsilon_v < 1$

On en déduit donc $\frac{K_{BONC} K_i}{T_i} > V_0$

soit $K_i > \frac{V_0 T_i}{K_{BONC}}$

Application numérique : $K_i=83,3$

Question 43

Estimer pour cette valeur les marges de gain et de phase du système et conclure sur le choix de cette correction. On pourra prendre une valeur approchée de K_i et on rappelle, si besoin, que $\log 2 \approx 0,3$.

Sur le diagramme pour $K_i=1$ (question 41), on peut lire une marge de gain de 75 dB environ (écart à 0 dB lorsque la phase vaut -180°).

Avec $K_i = 80$, la courbe de gain est remontée de $20 \cdot \log(80)$

Or, $20 \cdot \log(80) = 20 \cdot (\log(10) + 3 \cdot \log(2)) = 20 \cdot (1 + 0,9) = 38$ dB

Le marge de gain chute donc à 37 dB ce qui reste supérieur à la limite du cahier des charges.

La phase obtenue pour $K_i=1$ et à -38 dB vaut -90°. La marge de phase est donc de 90° et le cahier des charges est donc validé.

PARTIE D

VALIDATION DE L'ARCHITECTURE MÉCANIQUE DE LA STRUCTURE RÉALISANT LA CHAÎNE D'ÉNERGIE

D1 – ÉTUDE D'UNE COMMANDE AVEC UN SEUL ACTIONNEUR

Question 44

À partir du graphe de structure (graphe des liaisons) donné dans le cahier réponse, compléter le tableau du cahier réponse en précisant pour chaque liaison, sa désignation, les éléments géométriques caractéristiques, la forme du torseur cinématique V_k , c'est-à-dire l'expression des éléments de réduction en fonction des paramètres p_k, q_k, r_k, u_k, v_k et w_k dans la base locale de la liaison et la forme du torseur d'actions mécaniques transmissibles F_k , c'est-à-dire l'expression des éléments de réduction en fonction des paramètres X_k, Y_k, Z_k, L_k, M_k et N_k dans la base locale de la liaison.

Liaison	Désignation	Éléments géométriques	Torseur cinématique	Torseur des actions mécaniques transmissibles
L ₁	Glissière	suivant \bar{x}_1	$V_1^\circ \begin{pmatrix} \dot{0} & u_1 \ddot{u} \\ \dot{0} & 0 \dot{y} \\ \dot{0} & 0 \dot{p} \end{pmatrix}$	$F_1^\circ \begin{pmatrix} \dot{0} & L_1 \ddot{u} \\ \dot{Y}_1 & M_1 \dot{y} \\ \dot{Z}_1 & N_1 \dot{p} \end{pmatrix}$
L ₂	rotule	De centre D	$V_1^\circ \begin{pmatrix} \dot{p}_2 & 0 \ddot{u} \\ \dot{q}_2 & 0 \dot{y} \\ \dot{r}_2 & 0 \dot{p}_D \end{pmatrix}$	$F_1^\circ \begin{pmatrix} \dot{0} & L_1 \ddot{u} \\ \dot{0} & M_1 \dot{y} \\ \dot{0} & N_1 \dot{p}_D \end{pmatrix}$
L ₃	ponctuelle	De normale $I_1 \bar{n}_1$	$V_3^\circ \begin{pmatrix} \dot{p}_3 & u_3 \ddot{u} \\ \dot{q}_3 & 0 \dot{y} \\ \dot{r}_3 & w_3 \dot{p}_{D,O,B_{locale}} \end{pmatrix}$	$F_1^\circ \begin{pmatrix} \dot{X}_1 & L_1 \ddot{u} \\ \dot{0} & M_1 \dot{y} \\ \dot{Z}_1 & N_1 \dot{p}_{D,O,B_{locale}} \end{pmatrix}$
L ₄	ponctuelle	De normale $I_2 \bar{n}_2$	$V_4^\circ \begin{pmatrix} \dot{p}_4 & u_4 \ddot{u} \\ \dot{q}_4 & 0 \dot{y} \\ \dot{r}_4 & w_4 \dot{p}_{D,O,B_{locale}} \end{pmatrix}$	$F_1^\circ \begin{pmatrix} \dot{X}_1 & L_1 \ddot{u} \\ \dot{0} & M_1 \dot{y} \\ \dot{Z}_1 & N_1 \dot{p}_{D,O,B_{locale}} \end{pmatrix}$
L ₅	pivot	D'axe $A \bar{z}_3$	$V_5^\circ \begin{pmatrix} \dot{0} & 0 \ddot{u} \\ \dot{0} & 0 \dot{y} \\ \dot{r}_5 & 0 \dot{p}_A \end{pmatrix}$	$F_5^\circ \begin{pmatrix} \dot{X}_5 & L_5 \ddot{u} \\ \dot{Y}_5 & M_5 \dot{y} \\ \dot{0} & N_5 \dot{p}_A \end{pmatrix}$
L ₆	pivot	D'axe $B \bar{z}_3$	$V_6^\circ \begin{pmatrix} \dot{0} & 0 \ddot{u} \\ \dot{0} & 0 \dot{y} \\ \dot{r}_6 & 0 \dot{p}_B \end{pmatrix}$	$F_6^\circ \begin{pmatrix} \dot{X}_6 & L_6 \ddot{u} \\ \dot{Y}_6 & M_6 \dot{y} \\ \dot{0} & N_6 \dot{p}_B \end{pmatrix}$
L ₇	pivot	D'axe $C \bar{z}_3$	$V_7^\circ \begin{pmatrix} \dot{0} & 0 \ddot{u} \\ \dot{0} & 0 \dot{y} \\ \dot{r}_7 & 0 \dot{p}_C \end{pmatrix}$	$F_7^\circ \begin{pmatrix} \dot{X}_7 & L_7 \ddot{u} \\ \dot{Y}_7 & M_7 \dot{y} \\ \dot{0} & N_7 \dot{p}_C \end{pmatrix}$

Question 45

Déterminer la liaison équivalente L_{eq34} aux deux liaisons L_3 et L_4 situées entre le solide **1** et le solide **3**. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles F_{eq34} .

$$F_{eq34} = F_3 + F_4 = \begin{pmatrix} Y_3 n_1 + Y_4 n_2 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\rho} \end{pmatrix}$$

$$F_{eq34} = \begin{pmatrix} Y_3 (\cos \alpha y_1 - \sin \alpha z_1) + Y_4 (\cos \alpha y_1 + \sin \alpha z_1) \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\rho} \end{pmatrix}$$

$$F_{eq34} = \begin{pmatrix} (Y_3 + Y_4) \cos \alpha y_1 + (Y_3 - Y_4) \sin \alpha z_1 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\rho} \end{pmatrix}$$

$$F_{eq34} = \begin{pmatrix} Y_{eq34} y_1 + Z_{eq34} z_1 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\rho} \end{pmatrix}$$

Donc la liaison équivalente L_{eq34} est une linéaire annulaire d'axe O, \vec{x}_1

Question 46

Déterminer la liaison équivalente L_{eq12} aux deux liaisons L_1 et L_2 situées entre le solide **1** et le solide **3**. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles F_{eq12} .

$$V_{eq12} = V_1 + V_2 = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_2 x + q_2 y + r_2 z \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

$$V_{eq12} = \begin{pmatrix} p_2 x + q_2 y + r_2 z \\ r \\ u_1 x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

Donc la liaison équivalente L_{eq12} est une linéaire annulaire d'axe D, \vec{x}_1

$$F_{eq12} = \begin{pmatrix} Y_{eq12} y_1 + Z_{eq12} z_1 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\rho} \end{pmatrix}$$

Question 47

Déterminer la liaison équivalente L_{eq} aux deux liaisons L_{eq34} et L_{eq12} situées entre le solide **1** et le solide **3**. On attend une démonstration par le calcul. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles F_{eq} .

Justifier que la commande avec un seul vérin ne satisfait pas le cahier des charges.

$$F_{eq} = F_{eq34} + F_{eq12} = \begin{pmatrix} Y_{eq34} y_1 + Z_{eq34} z_1 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\rho} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_{eq12} y_1 + Z_{eq12} z_1 \\ r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\rho} \end{pmatrix}$$

$$F_{eq} = \begin{pmatrix} Y_{eq} y_1 + Z_{eq} z_1 \\ (a x_1 + R y_1) \ddot{\rho} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\rho} \end{pmatrix}$$

$$F_{eq} = \begin{pmatrix} Y_{eq} y_1 + Z_{eq} z_1 \\ a Y_{eq12} z_1 - a Z_{eq12} y_1 + R Z_{eq12} x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\rho} \end{pmatrix}$$

$$F_{eq} = \begin{pmatrix} Y_{eq} y_1 + Z_{eq} z_1 \\ a Y_{eq12} z_1 + Z_{eq12} (R x_1 - a y_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{z} \\ \ddot{\rho} \end{pmatrix}$$

Posons \vec{x}_{eq} le vecteur normal au plan $(\overline{OD}, \overline{z_1})$

$$F_{eq} = \begin{pmatrix} Y_{eq} y_1 + Z_{eq} z_1 \\ L_{eq12} x_{eq} + N_{eq} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}_{P_O}$$

$$V_{eq} = \begin{pmatrix} q_{eq} y_{eq} \\ u_1 x_1 \\ 0 \end{pmatrix}_{P_D}$$

Ce torseur ne correspond à aucune liaison normalisée.

Le mouvement attendu entre les solides **3** et **1** est une translation rectiligne de direction x_1 qui correspond à une liaison glissière entre ces deux solides. La liaison réalisée par une structure à un seul vérin ne réalise pas une liaison glissière et ne satisfait donc pas au cahier des charges.

D2 – ÉTUDE D'UNE COMMANDE AVEC DEUX ACTIONNEURS

Question 48

À partir du graphe de structure (graphe des liaisons) donné dans le cahier réponse et associé au schéma cinématique proposé, et en vous inspirant des résultats trouvés en D1 déterminer la liaison équivalente L_{eq1} aux liaisons L_{11} , L_{21} et la liaison équivalente L_{eq2} aux liaisons L_{12} et L_{22} entre les solides **1** et **3**.

La liaison équivalente L_{eq1} est une linéaire annulaire d'axe D_1, \vec{x}_1

La liaison équivalente L_{eq2} est une linéaire annulaire d'axe D_2, \vec{x}_1

Question 49

Déterminer par la méthode de votre choix, la liaison équivalente L'_{eq} aux deux liaisons L_{eq34} , L_{eq1} et L_{eq2} situées entre le solide **1** et le solide **3**. On précisera la forme du torseur des actions transmissibles F'_{eq} puis le torseur cinématique V'_{eq} . Le cahier des charges est-il vérifié pour une commande avec deux vérins ?

A partir de Q47, les deux liaisons L_{eq1} et L_{eq2} donnent les torseurs au point O' milieu de $D_1 D_2$

$$F_{eq12} = \begin{pmatrix} Y_{eq12} y_1 + Z_{eq12} z_1 \\ L_{eq12} y_1 + N_{eq12} z_1 \\ 0 \end{pmatrix}_{P_{O'}}$$

$$V_{eq12} = \begin{pmatrix} r_{eq12} z_1 \\ u_{eq12} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}_{P_{O'}}$$

La liaison L_{eq34} supprime la rotation. Donc la liaison équivalente est une liaison glissière suivant x_1 .

Le cahier des charges est donc vérifié.

D3 – ÉTUDE DE LA STRUCTURE ADOPTÉE PAR LE CONSTRUCTEUR

Question 50

Pour des raisons d'encombrement des vérins et de capacité à fournir les actions mécaniques de poussée, le bureau d'étude a finalement choisi de commander le tore avec 4 vérins pour obtenir la liaison glissière comme liaison équivalente entre les solides **1** et **3**. Quel est, dans ces conditions, le degré d'hyperstatisme du groupe de liaisons initial réalisant la liaison glissière ? Vous expliquerez

brèvement, mais clairement votre raisonnement. Que pensez-vous de ce résultat sur la capacité de réalisation de cette structure ?

La liaison glissière est réalisée par 4 liaisons linéaires annulaires en parallèles entre 3 et 1 qui génèrent chacune 4 inconnues cinématiques.

$$H = E_c - l_c + m_c = 18 - 16 + 1 = 3$$

Donc 3 inconnues hyperstatiques qui imposeront 3 conditions dimensionnelles ou géométriques.

PARTIE E

VALIDATION DE LA COMMANDE SYNCHRONISÉE DES VÉRINS

Question 51

Établir la fonction de transfert d'un axe *i* sous la forme : $H_{BF_i}(p) = \frac{X_i(p)}{X_{ref}(p)} = \frac{1}{1 + T_i p}$. On exprimera T_i en fonction de S_i , K_{Ci} , K_{Di} , K_{Pi} et K_{Ui} .

$$H_{BF}(p) = \frac{X(p)}{X_{ref}(p)} = \frac{K_{ci} \frac{K_{pi} K_{Ui} K_{Di}}{S_i p}}{1 + K_{ci} \frac{K_{pi} K_{Ui} K_{Di}}{S_i p}} = \frac{1}{1 + \frac{S_i}{K_{ci} K_{pi} K_{Ui} K_{Di}} p}$$

$K=1$

$$T_i = \frac{S_i}{K_{ci} K_{pi} K_{Ui} K_{Di}}$$

E1 – COMMANDE ASYNCHRONE

Question 52

Quel axe sera en retard sur l'autre ? Justifier votre réponse.
L'axe 2 sera en retard par rapport à l'axe 1 car $T_2 > T_1$.

Question 53

Exprimer $\Delta X(p)$ en fonction de $X_{ref}(p)$, T_1 et T_2 .

$$\Delta X(p) = X_1(p) - X_2(p)$$

$$\Delta X(p) = \left(\frac{1}{1 + T_1 p} - \frac{1}{1 + T_2 p} \right) X_{ref}(p)$$

$$\Delta X(p) = \left(\frac{(T_2 - T_1)p}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} \right) X_{ref}(p)$$

Question 54

Pour une consigne en échelon $x_{ref}(t) = X_0 \cdot u(t)$ où $u(t)$ représente l'échelon unité, que devient l'écart en régime permanent ?

$$\Delta X(p) = \left(\frac{(T_2 - T_1)p}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} \right) \frac{X_0}{p}$$

En régime permanent

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Delta X(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{(T_2 - T_1)p}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} \right) \frac{X_0}{p}$$

$$\varepsilon_S = 0$$

Question 55

Pour une consigne en rampe $x_{ref}(t) = V_0.t.u(t)$, déterminer la valeur maximale de l'écart $Vx(t)$ notée ε_{Vmax} en fonction de V_0 , T_1 et T_2 . Faire l'application numérique pour $V_0 = 25$ mm/s et conclure quant au respect du cahier des charges.

La fonction de transfert est un produit de système du 1^{er} ordre, Le coefficient d'amortissement $\xi = 1,0003 > 1$ donc la valeur maximale de l'écart $Vx(t)$ est la valeur en régime permanent

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Delta X(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{(T_2 - T_1)p}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} \right) \frac{V_0}{p^2}$$

$$\varepsilon_{Vmax} = (T_2 - T_1)V_0$$

E2 – COMMANDE MAÎTRE / ESCLAVE

Question 56

Exprimer $\Delta X(p)$ en fonction de $X_{ref}(p)$. Montrer que l'on peut mettre la relation sous la forme :

$$VX(p) = \frac{K\phi}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} X_{ref}(p) \text{ avec } K' = \frac{(T_2 - T_1).K_p.K_c}{K_s + K_p.K_c}. \text{ Exprimer } T_2 \text{ en fonction de } S, K_c, K_{D2}, K_p, K_u$$

et K_s .

$$\Delta X(p) = X_1(p) - X_2(p)$$

$$X_2(p) = \frac{1}{1 + T_2 p} X_{ref}(p) + \frac{\frac{K_s K_u K_{D2}}{S p}}{1 + K_c \frac{K_p K_u K_{D2}}{S p}} \Delta X(p) = \frac{1}{1 + T_2 p} X_{ref}(p) + \frac{\frac{1}{K_c K_p} K_s 1}{1 + \frac{S}{K_c K_p K_u K_{D2}} p}$$

$$X_2(p) = \frac{1}{1 + T_2 p} X_{ref}(p) + \frac{\frac{K_s}{K_c K_p}}{1 + T_2 p} \Delta X(p)$$

$$\Delta X(p) = \left(\frac{1}{1 + T_1 p} - \frac{1}{1 + T_2 p} \right) X_{ref}(p) - \frac{\frac{K_s}{K_c K_p}}{1 + T_2 p} \Delta X(p)$$

$$\Delta X(p) \left(1 + \frac{\frac{K_s}{K_c K_p}}{1 + T_2 p} \right) = \left(\frac{(T_2 - T_1)p}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} \right) X_{ref}(p)$$

$$\Delta X(p) \left(\frac{K_c K_p + K_s + K_c K_p T_2 p}{K_c K_p (1 + T_2 p)} \right) = \left(\frac{(T_2 - T_1)p}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)} \right) X_{ref}(p)$$

$$\Delta X(p) = \left(\frac{\frac{K_c K_p (T_2 - T_1)}{K_c K_p + K_s} p}{(1 + T_1 p) \left(1 + \frac{K_c K_p T_2}{K_c K_p + K_s} p \right)} \right) X_{ref}(p)$$

$$T'_2 = \frac{K_c K_p T_2}{K_c K_p + K_S} = \frac{S}{K_U K_{D2}}$$

$$T'_2 = \frac{(K_c K_p + K_S)S}{K_U K_{D2}}$$

Question 57

Déterminer la nouvelle expression de $\varepsilon_{V_{\max}}$ en fonction de V_0 , K_C , T_1 et T_2 .

La fonction de transfert est un produit de système du 1^{er} ordre, donc la valeur maximale de l'écart $Vx(t)$ est la valeur en régime permanent

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Delta X(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \left(\frac{K' p}{(1+T_1 p)(1+T'_2 p)} \right) \frac{V_0}{p^2}$$

$$\varepsilon_{V_{\max}} = K' V_0 = \frac{(T_2 - T_1) \cdot K_p \cdot K_C}{K_S + K_p \cdot K_C} V_0$$

Question 58

La solution adoptée permet-elle de respecter le cahier des charges ? Proposer un réglage pour le gain de synchronisation K_S pour $K_p = 2$ et $K_C = 2 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$.

Oui

$$K_S + K_p \cdot K_C = \frac{(T_2 - T_1) \cdot K_p \cdot K_C}{\varepsilon_{V_{\max}}} V_0$$

$$K_S = \frac{(T_2 - T_1) \cdot K_p \cdot K_C}{\varepsilon_{V_{\max}}} V_0 - K_p \cdot K_C$$

$$K_S = 6 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$$