

Compte rendu TP MEVIB – Vitesses critiques d’un arbre en rotation

Les objectifs de ce TP sont :

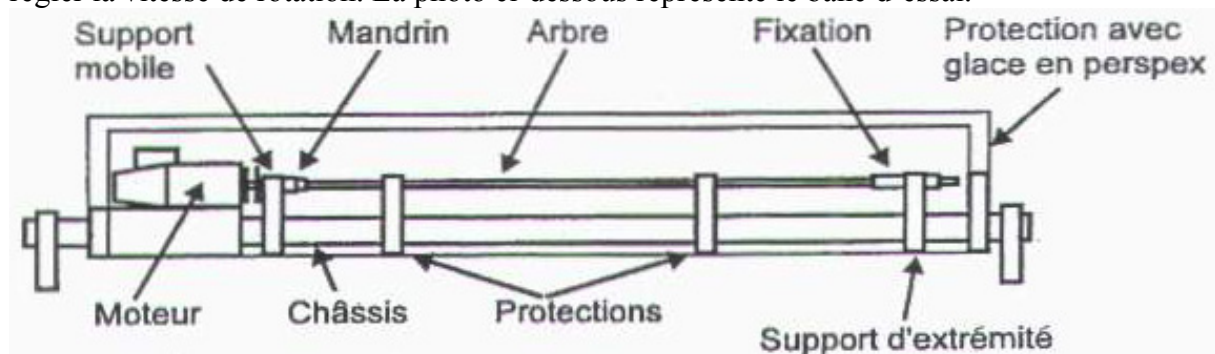
- Mesurer expérimentalement les différentes vitesses critiques d’arbre de différentes sections
- Déterminer analytiquement ces vitesses au moyens
- Déterminer au moyen de simulations ces vitesses au moyens
- Comparer les résultats obtenus au moyen par les différentes méthodes

I- Présentation et modélisation du système :

Le banc utilisé est constitué de 3 parties :

- Moteur
- Arbre et masses
- Élément de mesure

Le moteur permet des vitesses de rotation allant jusqu’à 6000 tr/min. Un potentiomètre permet d’en régler la vitesse de rotation. La photo ci-dessous représente le banc d’essai.



Le système arbre et masses se compose de l’arbre dont on souhaite mesurer les deux premiers modes propres et des masses que l’on peut éventuellement adjoindre à cet arbre. Le tableau ci-dessous récapitule les différentes caractéristiques des arbres.

Arbre n°	Diamètre [mm]	Longueur [m]	Masse [kg]
1	3	0,75	0,0426
2	3	0,9	0,0531
3	6	0,9	0,211
4	7	0,9	0,277

L’élément de mesure permet un visuel de la flexion de la poutre et ainsi de déterminer les deux premiers modes propres du système arbre + masse considéré. C’est en fait un stroboscope dont la fréquence d’éclairs est réglable.

En plus de ces systèmes se trouvent les différents systèmes de maintien de l’arbre : Appui-Appui, Appui-Fixe et Fixe-Fixe. On ne réalisera pas le cas appui-appui car il n’est pas facilement réalisable expérimentalement (utilisation de deux rotules).

II- Calcul analytique des modes propres d'un arbre en rotation :

Détermination des vitesses critiques pour des arbres sans masses :

On utilise la formule suivante pour déterminer les différentes vitesses critiques en rad/s pour chaque condition limites et pour chaque arbre :

$$W_n = X_n^2 \cdot \frac{D^2}{8 \cdot L^{\frac{3}{2}}} \cdot \sqrt{E \cdot \frac{\pi}{m}}$$

Avec : E= 207.10⁹ N/m²

	CL1			CL2			CL3	
	W1	W2		W1	W2		W1	W2
1	66,8	267,2		150,8	417,0		104,0	337,3
2	45,5	182,0		102,7	284,1		70,9	229,8
3	91,3	365,3		206,1	570,2		142,2	461,2
4	108,5	433,9		244,9	677,3		168,9	547,9

Détermination des fréquences critiques pour des arbres sans masses :

On reprend les résultats précédents et on divise par 2π pour obtenir les valeurs des fréquences critiques en Hz.

	CL1			CL2			CL3	
	f1	f2		f1	f2		f1	f2
1	10,6	42,5		24,0	66,4		16,6	53,7
2	7,2	29,0		16,3	45,2		11,3	36,6
3	14,5	58,1		32,8	90,7		22,6	73,4
4	17,3	69,1		39,0	107,8		26,9	87,2

Détermination des vitesses de rotation associées pour des arbres sans masses :

On reprend les résultats précédents et on multiplie par 60 pour obtenir les vitesses de rotation en tr/min.

	CL1			CL2			CL3	
	ω1	ω2		ω1	ω2		ω1	ω2
1	637,8	2551,2		1439,7	3982,2		993,0	3221,0
2	434,6	1738,3		981,0	2713,4		676,6	2194,7
3	872,0	3488,2		1968,4	5444,8		1357,7	4404,0
4	1035,9	4143,8		2338,4	6468,0		1612,9	5231,7

Remarque : Pour la seconde vitesse de rotation de la condition limite n°2, on se limitera à 6000 tr/min.

On observe que l'on peut classer les conditions limites par vitesse de rotation croissante : fixe-fixe puis appui-fixe puis appui-appui. Ce résultat était prévisible car les valeurs des X_i sont les plus grandes et que tous les autres paramètres sont soit constants soit dépendent de l'arbre. D'un point de vue expérimental, cela semble cohérent : il faut des fréquences plus élevées pour atteindre un mode propre pour une barre encastrée des deux côtés que pour une barre libre des deux côtés.

Du point de vue des arbres, plus le diamètre est élevé plus la fréquence augmente tandis que pour la longueur, plus elle est faible, plus la fréquence est grande. Pour le premier résultat, comme le diamètre est plus grand, la section est plus grande ce qui rend l'arbre moins souple d'où les fréquences plus élevées. Pour le second résultat, si l'arbre est plus court, il faut des fréquences plus élevées pour le mettre en vibration ; encore une fois, s'il est plus court, il va être moins souple (plus difficile à faire fléchir que s'il était long).

Détermination des vitesses critiques pour des arbres avec masses :

On utilise les formules suivantes pour déterminer les différentes flèches dans les différentes positions des masses. On ne traitera que le cas appui-appui.

$$\delta_s = \frac{5 \cdot m \cdot g \cdot L^3}{384 \cdot E \cdot I} \quad \delta_1 = \frac{m_1 \cdot g \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} \quad \delta_i = \frac{m_i \cdot a_i^2 \cdot b_i^2}{3 \cdot E \cdot I \cdot L}$$

Avec : $E = 207 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ et $I = \frac{D^4 \cdot \pi}{64}$ et $m_1 = m_2 = 300 \text{ g}$

On utilise ensuite la formule pour déterminer la valeur de la première vitesse critique en rad/min pour les différents arbres en adaptant la formule (seulement δ_1 dans le cas d'une masse).

$$N_c = \frac{178,8}{\sqrt{\delta_1 + \delta_2 + \frac{\delta_s}{1,27}}}$$

	Nc1 (une masse)	Nc2 (deux masses)
1	1024,2	824,7
2	772,9	624,1
3	2778,3	2322,5
4	3638,2	3076,0

Détermination des fréquences critiques pour des arbres sans masses :

On reprend les résultats précédents et on divise par $60 \cdot 2\pi$ pour obtenir les valeurs des fréquences critiques en Hz.

	f1 (une masse)	f2 (deux masses)
1	2,7	2,2
2	2,1	1,7
3	7,4	6,2
4	9,7	8,2

Détermination des vitesses de rotation associées pour des arbres sans masses :

On reprend les résultats précédents et on multiplie par 60 pour obtenir les vitesses de rotation en tr/min.

	$\omega 1$ (une masse)	$\omega 2$ (deux masses)
1	163,0	131,3
2	123,0	99,3
3	442,2	369,6
4	579,0	489,6

Le cas appui-appui étant le moins contraignant pour l'arbre, on obtient des vitesses de rotation assez faibles. On remarque que les vitesses de rotation sont plus faibles dans les deux cas chargés que dans les cas sans masse ; cela peut s'expliquer par l'inertie supplémentaire qu'apporte les masses qui vont contribuer à diminuer les valeurs de fréquences propres.

En ce qui concerne la comparaison des deux cas chargés, on voit que le cas à deux masses est sensiblement proche du cas à une masse. Comme les deux cas sont équilibrés (symétrie de la charge sur l'arbre) et sensiblement équivalents en terme de charge, on pouvait anticiper que les résultats seraient proches.

Le cas avec deux masses donne des résultats plus faibles que le cas avec une masse car l'arbre est légèrement plus chargé ce qui va contribuer à accentuer les effets dynamiques dus à l'ajout de masses sur l'arbre.

III- Détermination des fréquences propres par simulation numériques :

Dans cette partie on réalise l'ensemble des simulations avec le logiciel Abaqus.

Détermination des fréquences critiques pour des arbres sans masses :

Le tableau suivant répertorie les fréquences propres pour les deux conditions limites fixe-fixe et fixe-appui.

	CL2			CL3	
	f1	f2		f1	f2
1	24,4	67,4		16,9	54,6
2	16,9	46,8		11,7	37,5
3	23,4	93,6		23,4	75,8
4	39,6	109,2		27,3	88,5

On observe que les résultats sont très proches de ceux obtenus par le calcul analytique.

Détermination des fréquences critiques pour des arbres avec une masse :

Le tableau suivant répertorie les fréquences propres pour les deux conditions limites fixe-fixe et fixe-appui avec une masse de 300g au centre de l'arbre.

	CL2			CL3	
	f1	f2		f1	f2
1	5,5	67,4		4,1	50,9
2	4,2	46,8		3,1	35,4
3	15,3	93,6		11,3	71,6
4	20,1	109,2		14,9	83,2

On observe que dans le cas fixe-fixe les 2^{èmes} fréquences propres sont les mêmes que dans le cas non-chargé. Cela était prévisible en raison de la symétrie du problème, le nœud est au centre de la poutre tout comme la masse. L'influence de la masse est donc nulle sur les fréquences propres d'ordre paire : on pourrait prendre une masse bien plus élevée, le modèle nous donnerait toujours le même résultat.

Pour le cas fixe-appui, le nœud est légèrement décalé par rapport au centre de l'arbre car le problème n'est pas entièrement symétrique ; il reste cependant proche du centre de l'arbre. On obtient donc des résultats très proches du cas non chargé, mais cette fois-ci la masse a une influence, mais qui reste faible sans être négligeable pour autant.

Détermination des fréquences critiques pour des arbres avec deux masses :

Le tableau suivant répertorie les fréquences propres pour les deux conditions limites fixe-fixe et fixe-appui avec une masse de 300g à chaque extrémité de l'arbre.

	CL2			CL3	
	f1	f2		f1	f2
1	5,1	11,8		3,5	10,5
2	3,8	8,9		2,7	7,9
3	14,3	34,1		9,9	30,1
4	18,9	45,3		13,1	39,9

Dans ce cas de figure, on n'a plus la symétrie précédente car le problème perd sa condition de masse proche du nœud pour les fréquences propres paires. On obtient des valeurs où la masse a une influence et ce quelque soit l'ordre de la fréquence.

IV- Etude expérimentale :

Mesure des des fréquences propres avec différents arbres et un cas chargé :

	f1 (fixe-fixe)		f1 (fixe-appui)
1	24,1		17,2
2	17,5		11,1
3	32,6		26,1
4	39,3		30,1
4 + une masse	19,4		13,9

V- Comparaison des résultats expérimentaux et analytiques :

Détermination erreurs pour des arbres sans masses :

	f1 (fixe-fixe)	f1 (fixe appui)
1	0%	4%
2	7%	2%
3	1%	13%
4	1%	11%

On obtient des erreurs relativement faibles pour les deux premiers arbres en raison de leur faible section qui mettent en jeu de faibles efforts : le banc d'étude est donc capable de donner des valeurs relativement proches fiables.

Dans le cas des arbres à grande section, le banc d'essai est influencé par leur masse et les effets d'inertie qui en découlent. On a donc des mesures moins précises dues à la géométrie.

Le modèle analytique est donc relativement capable de fournir une bonne approximation du réel.

VI- Comparaison des résultats expérimentaux et simulations numériques :

Détermination erreurs pour des arbres sans masses et un cas chargé :

	f1 (fixe-fixe)	f1 (fixe appui)
1	1%	2%
2	3%	5%
3	4%	10%
4	1%	9%
4 + une masse	4%	7%

On obtient des erreurs relativement faibles pour les deux premiers arbres en raison de leur faible section qui mettent en jeu de faibles efforts : le banc d'étude est donc capable de donner des valeurs relativement proches fiables.

Dans le cas des arbres à grande section, le banc d'essai est influencé par leur masse et les effets d'inertie qui en découlent. On a donc des mesures moins précises dues à la géométrie.

Le modèle numérique est donc relativement capable de fournir une bonne approximation du réel dans les cas non-chargés.

Dans le dernier cas, on obtient des valeurs d'erreurs relativement faibles. Cependant, comme on n'a qu'une mesure pour un arbre, on ne peut pas conclure quant à la capacité du modèle à décrire le réel : il faudrait faire plus d'essais pour conclure.