

# Compte rendu TP MEVIB – Vibration à un degré de liberté

Les objectifs de ce TP sont :

- Modéliser le comportement d'un système à un degré de liberté constitué d'une poutre, d'un amortisseur, d'un ressort, de masses et excité par un balourd
- Déterminer expérimentalement et numériquement la fréquence de résonance et la position d'un système à un degré de liberté en vibration forcée
- Comparer les résultats obtenus à l'aide du modèle avec ceux de l'expérience
- Conclure sur la complémentarité entre expérience, modélisation et simulation

## I- Présentation et modélisation du système :

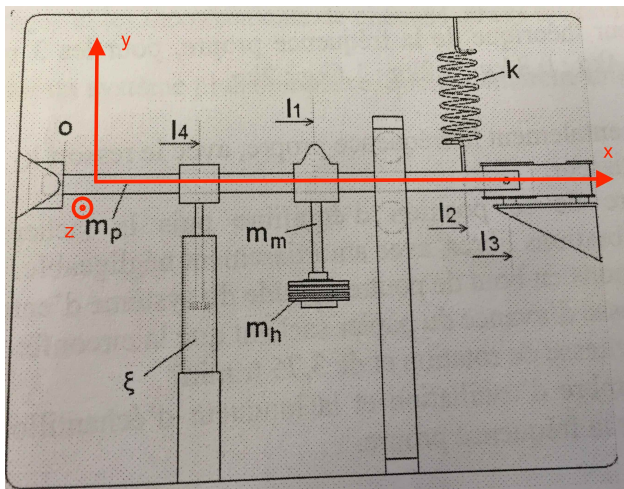


Figure 1 - Schéma du système

### Modélisation du système d'amortisseur :

On peut approcher le système étudié comme une modélisation d'un amortisseur de voiture. En effet, la barre représente l'axe de la roue, le ressort l'amortisseur et l'ensemble moteur + les masses  $m_h$  représente la réaction de la roue qui roulerait sur une route bosselée (solicitation périodique du moteur).

### Modélisation du système :

- On va dans un premier temps isoler le système et identifier les forces auxquels il est soumis.

*Hypothèse : On suppose qu'on se place dans un référentiel Galiléen*

Bilan des forces extérieures appliquées à la poutre :

- Force de frottements visqueux de l'amortisseur
- Force du ressort
- Force de pesanteur de la poutre
- Réaction du support en O

- Comme on n'a pas de donnée sur la réaction du support en O, on va réaliser un PFD en O qui est un point de référence qui ne se déplace pas au cours du temps.

Hypothèses :

- Problème plan (O,x,y)
- Force de frottement visqueux de l'amortisseur de type  $F = \xi \cdot v$
- Petits déplacements : on peut linéariser les fonctions trigonométriques :  $\sin(\theta) = \theta$  et  $\cos(\theta) = 1$  et  $\tan(\theta) = \theta$

Les différentes expressions des forces sont données ci-après :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{\text{amortisseur}}} &= -\xi \cdot \frac{d}{dt}(l_4 \cdot \tan(\theta(t))) \cdot \vec{y} \approx -\xi \cdot l_4 \cdot \frac{d}{dt}(\theta(t)) \cdot \vec{y} \\ \overrightarrow{F_{\text{ressort}}} &= -k \cdot l_2 \cdot \tan(\theta) \cdot \vec{y} \approx -k \cdot l_2 \cdot \theta(t) \cdot \vec{y} \\ \overrightarrow{F_{\text{pesanteur}}} &= -(m_m + m_p + m_h) \cdot g \cdot \vec{y} \\ \overrightarrow{F_{\text{Réaction}}} &= F_x \cdot \vec{x} + F_y \cdot \vec{y} \end{aligned}$$

On obtient l'équation du moment suivante en O projetée selon  $\vec{z}$

$$-l_4 \cdot \xi \cdot l_4 \cdot \frac{d}{dt}(\theta(t)) - l_2 \cdot k \cdot l_2 \cdot \theta(t) - l_1 \cdot (m_m + m_p + m_h) \cdot g + 0 \cdot (-F_x + F_y) = \delta(O, t)$$

- Il faut calculer  $\delta(O)$

$$\begin{aligned} \delta(O, t) &= \frac{d}{dt}(\sigma(O), t) \\ \sigma(O, t) &= J_{\text{tot}}(O) \cdot \Omega(O, t) = \left( J_{\text{poutre}}(O) + J_{\text{moteur}}(O) + J_{\text{masses}}(O) \right) \cdot \frac{d}{dt}(\theta(t)) \end{aligned}$$

Pour une poutre de section rectangulaire :

$$J_{\text{poutre}}(O) = \frac{m_{\text{poutre}}}{12} (h^2 + 4 \cdot l_3^2)$$

Pour l'inertie du moteur et des masses, on les considère comme des masses ponctuelles et la formule de l'inertie ramenée à O devient : distance<sup>2</sup> · masse

$$\begin{aligned} J_{\text{moteur}}(O) &= l_1^2 \cdot m_m \\ J_{\text{masses}}(O) &= l_1^2 \cdot m_h \end{aligned}$$

- Au finale, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & -\xi \cdot l_4^2 \cdot \frac{d}{dt}(\theta(t)) - k \cdot l_2^2 \cdot \theta(t) + l_1 \cdot (m_m + m_p + m_h) \cdot g \\ & = - \left( \frac{m_{\text{poutre}}}{12} (h^2 + 4 \cdot l_3^2) + l_1^2 \cdot (m_h + m_m) \right) \cdot \frac{d^2}{dt^2}(\theta(t)) \end{aligned}$$

Mis sous la forme souhaitée, on obtient :

$$\begin{aligned} & \left( \frac{m_{\text{poutre}}}{12} (h^2 + 4 \cdot l_3^2) + l_1^2 \cdot (m_h + m_m) \right) \cdot \frac{d^2}{dt^2}(\theta(t)) + \xi \cdot l_4^2 \cdot \frac{d}{dt}(\theta(t)) + k \cdot l_2^2 \cdot \theta(t) = \\ & -l_1 \cdot (m_m + m_p + m_h) \cdot g \quad [1] \end{aligned}$$

On obtient donc les valeurs suivantes pour les paramètres :

$$M = \frac{m_{poutre}}{12} (h^2 + 4 \cdot l_3^2) + l_1^2 \cdot (m_h + m_m)$$

$$C = \xi \cdot l_4^2 \quad K = k \cdot l_2^2 \quad F(t) = -l_1 \cdot (m_m + m_p + m_h) \cdot g$$

### Calcul de la masse de la poutre:

On a un poutre de section rectangulaire, donc :  $m_{poutre} = \rho \cdot h \cdot l_3 \cdot l = 1.99 \text{ kg}$

### Détermination de la raideur des ressorts :

On reprend l'équation [1] et on se place dans le cas statique, on obtient donc :

$$k \cdot l_2^2 \cdot \theta(t) = -l_1 \cdot (m_m + m_p + m_h) \cdot g$$

Comme on connaît les valeurs de l'ensemble des paramètres. On va ajouter des masses et ainsi faire varier la valeur de  $\theta$ . On prendra toutes les mesures par rapport à la position au repos à savoir quand  $m_h=0$ . Par différence, on obtient l'équation suivante permettant de déterminer  $k$  :

$$k = -l_1 \cdot m_h \cdot \frac{g}{l_2^2 \cdot \Delta\theta(t)} = -l_1 \cdot m_h \cdot \frac{g}{l_2 \cdot \Delta l}$$

avec  $\Delta l$  la variation du hauteur par rapport à un chargement nul repérée au moyen du stylo.

k=k1		
mh (kg)	$\Delta l$ (mm)	k (N/m)
0,4	-6,5	348,5
0,8	-12,9	351,2
1,2	-19,2	353,9
1,6	-25,2	359,5
Moyenne		353,3
Ecart-type		4,7

k=k2		
mh (kg)	$\Delta l$ (mm)	k (N/m)
0,8	-6,4	707,8
1,6	-12,7	713,4
2,4	-18,9	719,0
3,2	-25	724,8
Moyenne		716,2
Ecart-type		7,3

k=k3		
mh (kg)	$\Delta l$ (mm)	k (N/m)
1,6	-2,6	3484,5
3,2	-5,3	3418,8
4,8	-8	3397,4
Moyenne		3433,6
Ecart-type		45,4

On obtient donc les valeurs suivantes de  $k_i$  :

- $K_1 = 353 \pm 5 \text{ N/m}$
- $K_2 = 716 \pm 7 \text{ N/m}$
- $K_3 = 3434 \pm 45 \text{ N/m}$

## II- Vibrations libres et forcées avec amortissement négligeable:

### Vibrations libres sans amortissement :

Approche théorique :

Dans ce cas de figure, l'équation [1] devient :

$$M \cdot \frac{d^2}{dt^2} (\theta(t)) + K \cdot \theta(t) = F(t)$$

On obtient alors la valeur suivante de pulsation propre :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{M}} = \sqrt{\frac{k \cdot l_2^2}{\frac{m_{poutre}}{12} (h^2 + 4 \cdot l_3^2) + l_1^2 \cdot (m_h + m_m)}}$$

On obtient donc les valeurs suivantes de  $\omega_{propre}$  (rad/s):

k(N/m) \ mh (kg)	353	716	3434
0	14,9	21,2	46,3
0,4	14,3	20,3	44,5
0,8	13,8	19,6	42,9
1,2	13,3	18,9	41,4
1,6	12,9	18,3	40,1
2	12,5	17,8	38,9

On remarque que la fréquence propre varie de la façon suivante :

- Elle augmente avec la raideur du ressort
- Elle diminue avec quand la masse augmente

Approche expérimentale :

On va déterminer la expérimenter dans les conditions suivantes :

- Amortisseur dévissé  $\Rightarrow$  amortissement négligeable
- Aucune masse  $\Rightarrow$  vibrations libres
- Moteur à l'arrêt

$$V_{avance\ papier} = R \cdot \omega_{tambour} = \frac{P}{2 \cdot \pi} \cdot N_{tambour} \cdot \frac{\pi}{30} = 0,018\ m/s$$

Pour avoir une mesure moyenne, on prend 20 périodes. On obtient la longueur de papier suivante :  $L_{papier} = 134\ mm$  (figure 2).

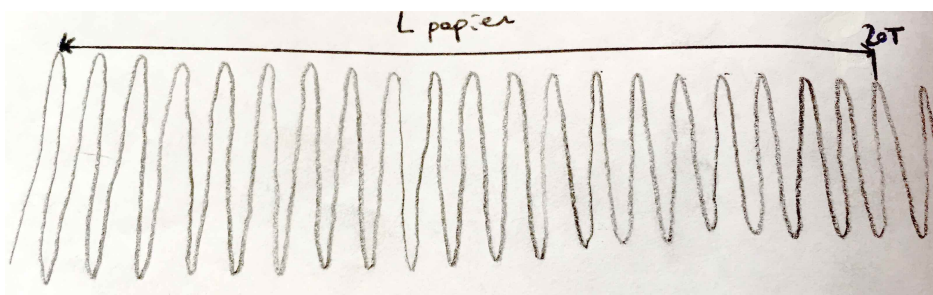


Figure 2 - Mesure fréquence propre

$$\text{Donc : } \omega_{libre} = \frac{20 \cdot V_{avance\ papier} \cdot 2\pi}{L_{papier}} = 16,9\ rad/s$$

Analyse des résultats:

On obtient un écart relatif de 20% par rapport à la valeur théorique.

Cela peut s'expliquer par la valeur de k déterminée expérimentalement. On pourrait réaliser une mesure plus précise avec un appareil dédié pour savoir si l'erreur peut venir de là.

Un autre facteur serait le frottement du stylo sur le papier qui engendrerait des pertes affectant la valeur de la fréquence.

On retiendra par la suite que le modèle permet d'expliquer le réel.

### **Vibrations forcées sans amortissement :**

En imposant au moteur une fréquence de rotation aux alentours de 520 tr/min, on arrive à la résonance. Ceci correspond à une fréquence de  $\omega_{forcé} = 520 \cdot \frac{2\pi}{60} = 16,6 \text{ rad/s}$ . Cette valeur est relativement proche de celle obtenue en régime libre ce qui corrobore l'idée qu'il y a eu une erreur lors de la détermination de k.

## **III- Vibrations libres et forcées avec amortissement :**

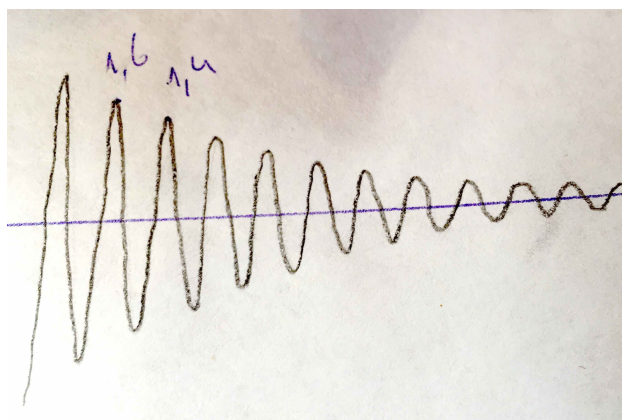
### **Vibrations libres avec amortissement faible :**

On va déterminer la expérimenter dans les conditions suivantes :

- Amortisseur vissé et trous face à face  $\Rightarrow$  amortissement faible
- Aucune masse  $\Rightarrow$  vibrations libres
- Moteur à l'arrêt

$$\alpha = \frac{C}{2 \cdot \sqrt{K \cdot M}} = \frac{\xi \cdot l_4^2}{2 \cdot \sqrt{k \cdot l_2^2 \cdot \left[ \frac{m_{poutre}}{12} (h^2 + 4 \cdot l_3^2) + l_1^2 \cdot m_m \right]}}$$

On mesure que  $\theta_1 = 16 \text{ mm}$   $\theta_2 = 14 \text{ mm}$  (voir figure 3) donc  $\alpha = \frac{\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)}{\omega_0 \cdot T} = \frac{\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)}{2\pi} = 0.021$



**Figure 3 - Essai amortissement faible**

On obtient que  $\xi = 11 \text{ kg/s}$

### **Vibrations libres avec amortissement fort :**

On va déterminer la expérimenter dans les conditions suivantes :

- Amortisseur vissé et trous bloqués  $\Rightarrow$  amortissement fort
- Aucune masse  $\Rightarrow$  vibrations libres
- Moteur à l'arrêt

$$\alpha = \frac{c}{2\sqrt{KM}} = \frac{\xi \cdot l_4^2}{2 \cdot \sqrt{k \cdot l_2^2 \cdot \left[ \frac{m_{poutre}}{12} (h^2 + 4 \cdot l_3^2) + l_1^2 \cdot m_m \right]}}$$

On mesure que  $\theta_1 = 12,5 \text{ mm}$   $\theta_2 = 6,5 \text{ mm}$  (voir figure 4) donc  $\alpha = \frac{\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)}{\omega \cdot 0,1} = \frac{\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)}{2\pi} = 0,10$

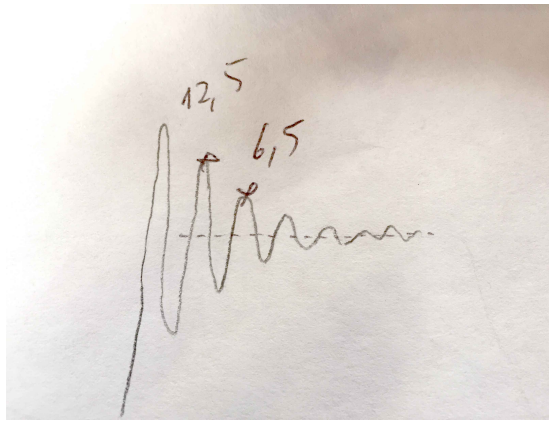


Figure 4 - Essai amortissement fort

On obtient que  $\xi=50 \text{ kg/s}$

#### IV- Conclusion :

Il est apparu que la valeur de k influée très fortement l'ensemble des résultats d'où la nécessité de le déterminer avec un outil de mesure précis (mesure d'allongement avec des masses connues verticalement).

En utilisant les deux méthodes, on arrive à des valeurs du même ordre de grandeur, mais encore une fois, il faudrait affiner la valeur de k.

La méthode théorique devrait utiliser des valeurs précises (écart type faible) avec des moyens de mesure adaptés pour être fiable et exploitable.

La méthode expérimentale utilisées engendre elle aussi des source d'erreur dues à :

- les erreurs de manipulations de l'opérateur
- le système d'acquisition mal étalonné
- les masses n'ayant pas forcément la précision donnée
- frottements négligés
- hypothèse de planéité contestable
- assimilation des solides à des points affectés d'une masse

Pour un système plus complexe, la théorie deviendra de plus en plus approximative en raison du nombre d'hypothèses pour simplifier les calculs. De plus, dans l'industrie, la théorie n'est employée que pour obtenir des modèles simples ; par la suite, on privilégie des résultats empiriques qui reflètent mieux le réel à condition d'avoir un banc d'essai fidèle au système réel.