Introduction à la Mécanique des Milieux Continus (MMC) : Étude des déformations

Formule de transport convectif d'un vecteur matériel élémentaire : $\overrightarrow{dx}=\bar{\bar{F}}(\vec{X},t)\cdot\overrightarrow{dX}$ avec $\bar{\bar{F}}$ le

tenseur gradient de la transformation est définie par : $\bar{\bar{F}}(\vec{X},t)=\overline{\overline{Grad}}(\vec{f})$ et $\vec{f}$ la transformation de la configuration initiale $C_0$ à la configuration à l'instant t : $C_t$ .

En ce qui concerne les variations de volume :
$dv=J\cdot dv_0$ , J : le jacobien à l'instant t de la transformation $\vec{x}=\vec{f}(\vec{X},t)$ : $J=det(\bar{\bar{F}}(\vec{X},t))$

Et de surface :

$$dS\cdot\vec{n}=J\cdot dS_0(\bar{\bar{F}}^T)^{-1}\cdot\vec{n}_0$$

Définitions :

Transformation homogène : une transformation est dite homogène si le tenseur $\bar{\bar{F}}$ est indépendant des coordonnées $(X_1,X_2,X_3)$ . Dans ce cas : les coordonnées $(x_1,x_2,x_3)$ sont des fonctions affines des coordonnées $(X_1,X_2,X_3)$ :

$$\vec{x}=\bar{\bar{F}}(\vec{X},t)\cdot\vec{X}+\vec{b}(t)$$

Transformation de solide rigide ou rigidifiante : c'est un cas particulier de transformations homogènes pour lequel le tenseur $\bar{\bar{F}}$ est orthogonal et se réduit à la rotation de solide rigide :
$\bar{\bar{F}}=\bar{\bar{R}}(t)$ , $\vec{x}=\bar{\bar{R}}(t)\cdot\vec{X}+\vec{b}(t)$ , $\bar{\bar{R}}\cdot\bar{\bar{R}}^T=\bar{\bar{I}}$ et $det(\bar{\bar{R}})=1$

En ce qui concerne les déformations d'un milieux matériel, elle peuvent être caractérisées en étudiant les variations de produit scalaire de vecteurs élémentaires :

$\overrightarrow{dM}\cdot\overrightarrow{\delta M}=\overrightarrow{dM_0}\cdot\bar{\bar{C}}\cdot\overrightarrow{\delta M_0}$ , le tenseur symétrique $\bar{\bar{C}}$ est le tenseur des dilatations de Cauchy-Green à droite.

$\overrightarrow{dM}\cdot\overrightarrow{\delta M}-\overrightarrow{dM_0}\cdot\overrightarrow{\delta M_0}=2\overrightarrow{dM_0}\cdot\bar{\bar{E}}\cdot\overrightarrow{\delta M_0}$ , le tenseur symétrique $\bar{\bar{E}}$ est le tenseur des déformations de Green-Lagrange.

Pour une transformation de solide rigide : $\bar{\bar{E}}=\bar{\bar{0}}$

Détermination du tenseur des déformations de Green-Lagrange $\bar{\bar{E}}$ par la formule du ds² :
On pose : $ds^2=\overrightarrow{dM}\cdot\overrightarrow{dM}$ et $ds_0^2=\overrightarrow{dM_0}\cdot\overrightarrow{dM_0}$

On obtient alors : $ds^2-ds_0^2=2\overrightarrow{dM_0}\cdot\bar{\bar{E}}\cdot\overrightarrow{dM_0}$

Définitions :

Dilatation dans la direction matérielle $\vec{n}_0$ (au point $M_0$ à l'instant t) : $\lambda(\vec{n}_0,\vec{X},t)=\dfrac{dl}{dl_0}$

Allongement unitaire (ou relatif) dans la direction matérielle $\vec{n}_0$ (au point $M_0$ à l'instant t) :

$$\varepsilon(\vec{n}_0, \vec{X}, t) = \frac{dl - dl_0}{dl_0}$$

Il y a conservation des angles au cours d'une transformation si et seulement si $\bar{\bar{E}}$ est sphérique c'est-à-dire : $\bar{\bar{E}} = E(\vec{X}, t) \cdot \bar{\bar{I}}$

Vitesse de déformation :

$\dot{\bar{\bar{E}}} = \bar{\bar{F}}^T \cdot \bar{\bar{D}} \cdot \bar{\bar{F}}$ avec $\bar{\bar{D}}$ le tenseur des taux de déformations

Champs de déplacement :

Déplacement du point matériel à l'instant t : $\vec{u}(\vec{X}, t) = \vec{x}(\vec{X}, t) - \vec{X}$

Tenseur gradient du déplacement : $\bar{\bar{H}} = \overline{\overline{Grad}}(\vec{u})$

$\bar{\bar{H}} = \bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}}$ , $\bar{\bar{H}} = \bar{\bar{\varepsilon}} + \bar{\bar{\omega}}$ avec $\bar{\bar{\varepsilon}}$ la partie symétrique de $\bar{\bar{H}}$ et $\bar{\bar{\omega}}$ la partie antisymétrique.

Définitions :

Petite transformation ou transformation infinitésimale : La transformation d'un milieu entre les configurations $C_0$ et $C_t$ , dans un référentiel R, est dite infinitésimale si le champ de tenseur gradient du déplacement est tel que : $\|\bar{\bar{H}}(\vec{X}, t)\| \ll 1 \quad \forall \vec{X} \in C_0$

Attention : $\mathit{transformation\ infinitésimale} \Rightarrow \mathit{déformation\ infinitésimale}$ mais la réciproque est fausse, contre-exemple : la transformation de solides rigides.

Dans l'hypothèse des transformations infinitésimales : $J \simeq 1 + trace(\bar{\bar{\varepsilon}}) = 1 + \operatorname{div}(\vec{u})$

$$\frac{dv - dv_0}{dv_0} = J - 1 \simeq \operatorname{div}(\vec{u}) = trace(\bar{\bar{\varepsilon}})$$

Dans le cas d'une transformation homogène et infinitésimale : $\vec{u}(\vec{X}, t) = \bar{\bar{\varepsilon}}(t) \cdot \vec{X} + \bar{\bar{\omega}}(t) \cdot \vec{X} + \vec{b}(t)$

Définition :

<u>Hypothèse des petits déplacements</u> : On dit que la transformation d'un milieu entre les configurations $C_0$ et $C_t$ , dans un référentiel R vérifie l'hypothèse des petits déplacements si le champ de déplacement est tel que : $\|\vec{u}(\vec{X}, t)\| \ll L_0 \quad \forall \vec{X} \in C_0$

avec $L_0$ une longueur caractéristique du système matériel étudié.

Cette hypothèse amène à confondre coordonnées lagrangiennes : $(X_1, X_2, X_3)$ et eulériennes : $(x_1, x_2, x_3)$ .

<u>Hypothèse des petites perturbations (H.P.P) = Hypothèse des petits déplacements + Transformation infinitésimale</u>

**A partir de maintenant on se place par défaut en H.P.P**

L'allongement dans une direction matérielle $\vec{n}_0$ peut alors s'écrire :

$$\varepsilon(\vec{n}_0,\vec{X},t)=\vec{n}_0\cdot\bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\vec{n}_0$$

Glissement relatif à deux directions orthogonales $(\vec{n}_0,\vec{n}_1)$ :

$$\gamma(\vec{n}_0,\vec{n}_1)=2\vec{n}_0\cdot\bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\vec{n}_1$$

Composantes du tenseur des déformations linéarisé relatives à une base O.N. ( $\vec{e}_i$ ) :

$\varepsilon_{11}(\vec{X},t)=\vec{e}_1\cdot\bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\vec{e}_1$ : allongement dans la direction $\vec{e}_1$

$2\varepsilon_{12}(\vec{X},t)=2\varepsilon_{21}(\vec{X},t)=2\vec{e}_1\cdot\bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\vec{e}_2=2\vec{e}_2\cdot\bar{\bar{\varepsilon}}\cdot\vec{e}_1=\gamma(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ : glissement relatif à $(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$

<u>Décomposition de $\bar{\bar{\varepsilon}}$ en partie sphérique et déviateur</u> :

Tenseur sphérique : ses trois valeurs propres sont identiques. Il traduit une dilatation uniforme.
Déviateur : tenseur à trace nulle. Il traduit une distorsion sans changement de volume.

$\bar{\bar{\varepsilon}}=\varepsilon_s\cdot\bar{\bar{I}}+\bar{\bar{\varepsilon}}^d$ avec $\varepsilon_s=\frac{1}{3}trace(\bar{\bar{\varepsilon}})$ : déformation principale moyenne

$$\bar{\bar{\varepsilon}}=\frac{1}{2}(\overline{\overline{Grad}}(\vec{u})+\overline{\overline{Grad}}(\vec{u})^T)$$

Valeur de la distorsion maximale : $\frac{\varepsilon_I-\varepsilon_{III}}{2}$

## Méthode de résolution d'exercices :

<u>Deux méthodes pour déterminer $\bar{\bar{\varepsilon}}$ :</u>

- Si on connaît le déplacement : on a donc une expression du vecteur déplacement $\vec{u}$ sous la forme :

$$\vec{u}=\begin{Bmatrix} u_1=a\cdot X_1+b\cdot X_2+c\cdot X_3 \\ u_2=d\cdot X_1+e\cdot X_2+f\cdot X_3 \\ u_3=g\cdot X_1+h\cdot X_2+i\cdot X_3 \end{Bmatrix}$$

Or $\bar{\bar{H}}=\overline{\overline{Grad}}(\vec{u})$ et $\bar{\bar{\varepsilon}}$ est la partie symétrique de $\bar{\bar{H}}$ donc $\bar{\bar{\varepsilon}}=\frac{1}{2}(\bar{\bar{H}}+\bar{\bar{H}}^T)$

- Si on connaît la transformation : on a donc le vecteur $\vec{f}$ sous la forme :

$$\vec{f} = \begin{Bmatrix} x_1 = a \cdot X_1 + b \cdot X_2 + c \cdot X_3 \\ x_2 = d \cdot X_1 + e \cdot X_2 + f \cdot X_3 \\ x_3 = g \cdot X_1 + h \cdot X_2 + i \cdot X_3 \end{Bmatrix}$$

Or $\bar{\bar{F}}(\vec{X},t) = \overline{\overline{Grad}}(\vec{f})$ et $\bar{\bar{H}} = \bar{\bar{F}} - \bar{\bar{I}}$ finalement : $\bar{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2}(\bar{\bar{H}} + \bar{\bar{H}}^T)$

<u>Si il est dit que la transformation se fait à volume constant alors</u> : $trace(\bar{\bar{\varepsilon}}) = 0$ cela donne une équation pour trouver un inconnu.

Méthodes de détermination des déformations principales et des directions principales de déformation:

- Il suffit de trouver les valeurs propres de $\bar{\bar{\varepsilon}}$ : ce sont les déformations principales et les vecteurs propres de $\bar{\bar{\varepsilon}}$ sont les directions principales de déformation.

- Méthode du cercle de Mohr : Il faut que $\bar{\bar{\varepsilon}}$ soit d'une des formes suivantes dans la base $(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ :

$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & \varepsilon_{13} \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ \varepsilon_{13} & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$ dans ce cas l'étude suivante de fait dans un plan orthogonal à $\vec{e_2}$

$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ 0 & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$ dans ce cas l'étude suivante de fait dans un plan orthogonal à $\vec{e_1}$

$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$ dans ce cas l'étude suivante de fait dans un plan orthogonal à $\vec{e_3}$

On se place dans le troisième cas on réalise donc l'étude suivante dans la plan $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ :

On défit deux points diamétralement opposés sur le cercle de Mohr :

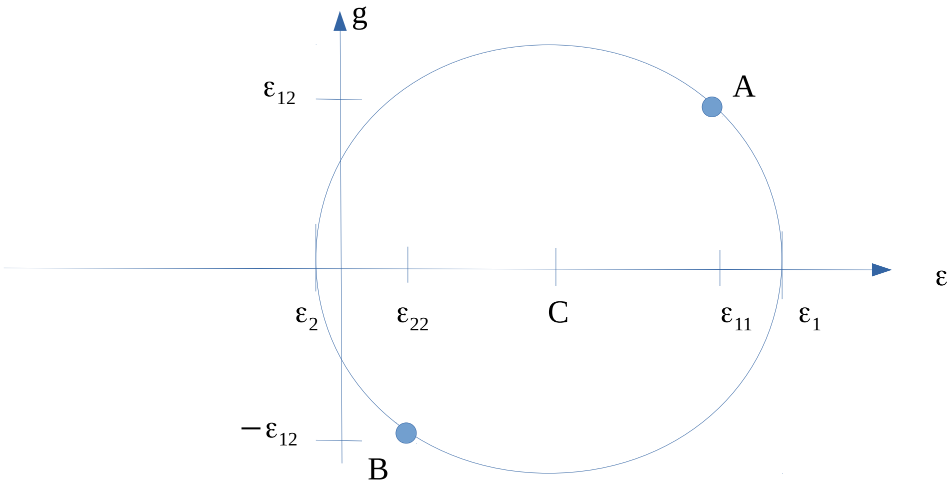
$A(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12})$ et $B(\varepsilon_{22}, -\varepsilon_{12})$

On détermine alors le centre du cercle ce point est nécessairement du l'axe des abscisses, reste alors à déterminer son abscisse : $X_C = \frac{\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}}{2}$

Puis son rayon : $R = \sqrt{\varepsilon_{12}^{\ 2} + (\varepsilon_{11} - X_C)^2}$

Enfin : les déformations principales : $\varepsilon_1 = X_C + R$ , $\varepsilon_2 = X_C - R$ et $\varepsilon_3 = \varepsilon_{33}$

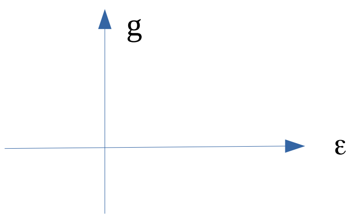
Par convention on les renomme en les rangeant par ordre décroissant : $\varepsilon_I \geq \varepsilon_{II} \geq \varepsilon_{III}$



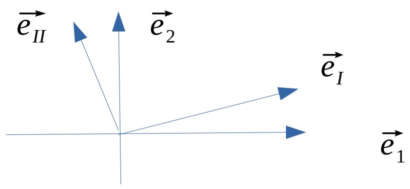

Maintenant : on cherche les directions principales de déformation associées à ces déformations principales : elles sont notées : $\vec{e}_I$ , $\vec{e}_{II}$ et $\vec{e}_{III}$

Équivalences entre plan de Mohr $(\varepsilon, g)$ et plan vectoriel $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ :

Plan de Mohr $(\varepsilon, g)$




Plan vectoriel $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$




$\overrightarrow{C\varepsilon_1} \longrightarrow \vec{e}_I$

$\overrightarrow{C\varepsilon_2} \longrightarrow \vec{e}_{II}$

$\overrightarrow{CB} \longrightarrow \vec{e}_2$

$\overrightarrow{CA} \longrightarrow \vec{e}_1$

Un angle quelconque entre deux vecteurs dans le plan vectoriel φ correspond à -2 φ dans le plan de Mohr.

Si on suppose $(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \varphi$ alors $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{C\varepsilon_2}) = -2\varphi$

D’autre part, $(\overrightarrow{C\varepsilon_1}, \overrightarrow{CA}) = -2\theta$ donc $(\vec{e_I}, \vec{e_1}) = \theta$, grâce au cercle de Mohr tracé précédemment on remarque que :

$$\tan(-2\theta) = \frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} - X_C}$$

Ainsi, on déduit : $\theta = -\frac{1}{2} \cdot \arctan\left(\frac{\varepsilon_{12}}{\varepsilon_{11} - X_C}\right)$

On en déduit les directions principales de déformations :

La direction pour la première déformation principale est : $\vec{e_I} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$

Comme elle fait un angle de 90° avec la première direction principale :la direction de la deuxième déformation principale est : $\vec{e_{II}} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$

On connaît la troisième direction principale puisqu’elle est évidente au vu de la matrice :

$$\vec{e_{III}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a bien : $\vec{e_{III}} = \vec{e_I} \wedge \vec{e_{II}}$